EXERCICES

تـــمـــاريـــن

Exercice 3.1 Convertir le vecteur suivant des coordonnées cartésiennes $(\vec{i},\vec{j})$ en coordonnées polaires $(\vec{u}_r,\vec{u}_\varphi)$: $\vec{V}=X\vec{i}+Y\vec{j}$	**التمرين 1.3** حوّل عبارة الشعاع التالي من الإحداثيات الكارتيزية $(\vec{i},\vec{j})$ إلى جملة الإحداثيات القطبية $(\vec{u}_r,\vec{u}_\varphi)$: $\vec{V}=X\vec{i}+Y\vec{j}$

Exercice 3.2 Convertir le vecteur suivant des coordonnées sphériques $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_\varphi)$ en coordonnées cartésiennes: $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ $\vec{V}=V_r\vec{u}_r+V_\theta\vec{u}_\theta+V_\varphi\vec{u}_\varphi$	**التمرين 2.3** حوّل عبارة الشعاع التالي من الإحداثيات الكروية $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_\varphi)$ إلى جملة الإحداثيات الكارتيزية $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$: $\vec{V}=V_r\vec{u}_r+V_\theta\vec{u}_\theta+V_\varphi\vec{u}_\varphi$

Exercice 3.3 Convertir le vecteur suivant des coordonnées cartésiennes $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ en coordonnées cylindriques $(\vec{u}_\rho,\vec{u}_\varphi,\vec{u}_z)$: $\vec{V}=X\vec{i}+Y\vec{i}+Z\vec{i}$	**تمرين 3.3** حوّل عبارة الشعاع التالي من الإحداثيات الكارتيزية $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ إلى جملة الإحداثيات الأسطوانية $(\vec{u}_\rho,\vec{u}_\varphi,\vec{u}_z)$: $\vec{V}=X\vec{i}+Y\vec{i}+Z\vec{i}$

Exercice 3.4 Convertir le vecteur suivant des coordonnées cartésiennes $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ en coordonnées sphériques $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_\varphi)$: $\vec{V}=X\vec{i}+Y\vec{j}+Z\vec{k}$	**التمرين 34.:** حوّل عبارة الشعاع التالي من الإحداثيات الكارتيزية $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ إلى جملة الإحداثيات الكروية $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_\varphi)$: $\vec{V}=X\vec{i}+Y\vec{j}+Z\vec{k}$

Exercice 3.5 Convertir le vecteur suivant en coordonnées sphériques $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_\varphi)$: $\vec{A}=\rho^2.\vec{u}_\rho+\cos\varphi.\vec{u}_\varphi$	**التمرين 5.3** حوّل عبارة الشعاع التالي إلى الإحداثيات الكروية $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_\varphi)$: $\vec{A}=\rho^2.\vec{u}_\rho+\cos\varphi.\vec{u}_\varphi$

Exercice 3.6 Convertir le vecteur suivant des coordonnées cylindriques $(\vec{u}_\rho,\vec{u}_\varphi,\vec{u}_z)$ en coordonnées cartésiennes $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$: $\vec{V}=V_\rho\vec{u}_\rho+V_\varphi\vec{u}_\varphi+V_z\vec{u}_z$	**تمرين6.3** حوّل عبارة الشعاع التالي من الإحداثيات الأسطوانية $(\vec{u}_\rho,\vec{u}_\varphi,\vec{u}_z)$ إلى جملة الإحداثيات الكارتيزية $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$: $\vec{V}=V_\rho\vec{u}_\rho+V_\varphi\vec{u}_\varphi+V_z\vec{u}_z$

Exercice 3.7 Trouver la distance entre les deux points $M(\rho_M, \varphi_M, z_M)$ et $N(\rho_N, \varphi_N, z_N)$ par les deux méthodes : 1/ en convertissant l'expression du vecteur $\overrightarrow{MN}$ en coordonnées cartésiennes. 2/ par le calcul direct. Montrer que la distance entre les points M et N s'écrit : $\left\Vert\overrightarrow{MN}\right\Vert = \sqrt{\rho_N^2 + \rho_M^2 + (z_N - z_M)^2 - 2\rho_N.\rho_M.\cos(\varphi_M - \varphi_N)}$	**التمرين 7.3:** جد عبارة المسافة بين نقطتين $M(\rho_M, \varphi_M, z_M)$ و $N(\rho_N, \varphi_N, z_N)$ و ذلك بالطريقتين المختلفتين: 1/ بتحويل عبارة الشعاع $\overrightarrow{MN}$ إلى الإحداثيات الكارتيزية، 2/ بالحساب المباشر. بين أن المسافة بين النقطتين M و N تكتب بالشكل التالي: $\left\Vert\overrightarrow{MN}\right\Vert = \sqrt{\rho_N^2 + \rho_M^2 + (z_N - z_M)^2 - 2\rho_N.\rho_M.\cos(\varphi_M - \varphi_N)}$

Corrigés des exercices 4.1 à 4.7 — حلول التمارين من 1.4 إلى 7.4

Exercice 4.1:

1/ Pour calculer la vitesse il suffit de dériver l'équation horaire par rapport au temps:

$$\boxed{v = \frac{ds}{dt} = 6t^2 - 18t + 12}$$

En dérivant la vitesse par rapport au temps on obtient l'accélération:

$$\boxed{a = \frac{dv}{dt} = 12t - 18}$$

2/ L'étude du mouvement du mobile nécessite une étude mathématique de la fonction $s = 2t^3 - 9t^2 + 12t + 1$. Le mouvement est accéléré ou retardé selon le signe du produit av. Quant au sens du mouvement il est indiqué par le signe de v.

Dressons le tableau de variation et concluons:

$v = 6t^2 - 18t + 12 = 0 \Rightarrow t = 1$; $t=2$; $a = 12t - 18 = 0 \Rightarrow t = 1,5$

t	0		1		1,5		2		∞
v		+	0	−		−	0	+	
a		−		−	0	+		+	
$a.v$		−		+		−		+	
Mouvmt		**Retardé sens +**		**Accéléré sens -**		**Retardé sens -**		**Accéléré sens +**	

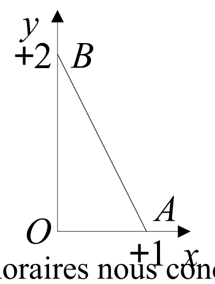
Exercice 4.2:

Commençons par la transformation trigonométrique: $\cos 2t = 2\cos^2 t - 1$,
Remplaçons dans l'expression de y qui devient: $y = 2\cos^2 t$,

Une autre transformation trigonométrique nous mène à : $y = 2\left(\sin^2 t - 1\right)$,

Il ne nous reste plus qu'à remplacer $\sin^2 t$ par x pour obtenir l'équation de la trajectoire qui est: $\boxed{y = 2\left(1 - x\right)}$.

Pour dessiner la trajectoire il faut remarquer que $0 \le x \le +1$, car quelque soit t, $0 \le \sin^2 t = x \le +1$. Nous en déduisons que la trajectoire est un segment de droite joignant les points $A\left(+1, 0\right)$ et $B\left(0, +2\right)$.



Exercice 4.3:

Deux dérivations consécutives des équations horaires nous conduisent aux expressions des coordonnées des vecteurs vitesse et accélération du mobile à l'instant t:

$$\vec{v}\begin{cases} v_x = \dot{x} = 3\left(t^2 - 1\right) \\ v_y = \dot{y} = -6t \\ v_z = \dot{z} = 3\left(t^2 + 1\right) \end{cases} \quad ; \quad \vec{a}=\begin{cases} a_x = \ddot{x} = 6t \\ a_y = \ddot{y} = -6 \\ a_z = \ddot{z} = 6t \end{cases}$$

2/ Le module du vecteur vitesse est égal à $v^2 = 18\left(1+t^2\right)^2 \Rightarrow \boxed{v = 3\sqrt{2}\left(1+t^2\right)}$

Calculons maintenant l'angle compris entre $\vec{v}$ et Oz . Pour cela calculons le module du produit scalaire:

$$\vec{v}.\vec{k} = v.k.\cos\left(\vec{v},\vec{k}\right) = v.cos\left(\vec{v},\vec{k}\right) \quad , \quad cos\left(\vec{v},\vec{k}\right) = \frac{\vec{v}.\vec{k}}{v}$$

$$\vec{v}\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{k}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{v}.\,\vec{k} = \left(\dot{x}.0\right) + \left(\dot{y}.0\right) + \left(\dot{z}.0\right) = 3\left(1+t^2\right)$$

$$cos\left(\vec{v},\vec{k}\right) = \frac{\vec{v}.\vec{k}}{v} = \frac{3\left(1+t^2\right)}{3\sqrt{2}\left(1+t^2\right)} \Rightarrow cos\left(\vec{v},\vec{k}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \boxed{\left(\vec{v},Oz\right) = \frac{\pi}{4}rad}$$

Exercice 4.4:

a/ Eliminons le temps entre les deux équations horaires pour obtenir l'équation de la trajectoire :

$$x = \ln t \Rightarrow t = e^x$$

$$y = e^x + \frac{1}{e^x} \Rightarrow \boxed{y = e^x + e^{-x}}$$

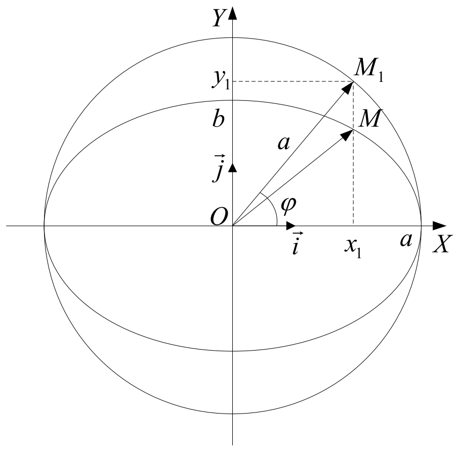
b/ calculons les modules de la vitesse et de l'accélération au temps t par dérivations successives des deux équations horaires par rapport au temps:

$$\left.\begin{array}{l} v_x = \dfrac{1}{t} \\ v_y = 1 - \dfrac{1}{t^2} \end{array}\right| \Rightarrow v = \sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{t^2}\right)^2} \quad ; \quad \boxed{v = \sqrt{\frac{1}{t^4} - \frac{1}{t^2} + 1}}$$

$$\left.\begin{array}{l} a_x = -\dfrac{1}{t^2} \\ a_y = \dfrac{2t}{t^4} = \dfrac{2}{t^3} \end{array}\right| \Rightarrow a = \sqrt{\left(\frac{1}{t^2}\right)^2 + \left(\frac{2}{t^3}\right)^2} \quad ; \quad \boxed{a = \sqrt{\frac{4}{t^6} + \frac{1}{t^4}}}$$

Exercice 4.5:

Rappel mathématique concernant l'ellipse: suivons le raisonnement qui accompagne la figure ci-dessous :



Equation du cercle $x^2 + y^2 - a^2 = 0 \rightarrow (1)$

Equation de l'ellipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \rightarrow (2)$

Coordonnées du point M: $\begin{cases} x_1 = a\cos\varphi \\ y_1 = a\sin\varphi \end{cases}$

remplaçons x et y dans l'équation (1) :

$\forall M,\ a^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi - a^2 = 0 \Rightarrow \cos^2\varphi + \sin^2\varphi - 1 = 0 \rightarrow (3)$

Par identification des équations (2) *et* (3) *nous obtenons deux résultats importants qui caractérisent l'ellipse:*

$(2) = (3) : \cos\varphi = \dfrac{x}{a} \Rightarrow \boxed{x = a\cos\varphi}\ ,\quad \sin\varphi = \dfrac{y}{b} \Rightarrow \boxed{y = b\sin\varphi}$

Maintenant que nous avons les coordonnées du point M, nous pouvons repérer ce point sur l'ellipse par l'angle φ tel que $\cos\varphi = \dfrac{x}{a}\ ;\ \sin\varphi = \dfrac{y}{b}$

La vitesse du point M est égale à:

$\overrightarrow{OM} = a\cos\varphi.\vec{i} + b\sin\varphi.\vec{j} \Rightarrow \boxed{\vec{v} = -a\dot{\varphi}\sin\varphi.\vec{i} + b\dot{\varphi}\cos\varphi.\vec{j}}$

L'accélération du point M est: $\boxed{\vec{\gamma} = -a\left(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi\right).\vec{i} + b\left(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi\right).\vec{j}}$

Exercice 4.6:

1/ Pour obtenir l'équation de la trajectoire il suffit d'éliminer le temps entre les équations horaires :

$$\left.\begin{array}{l} \cos\dfrac{t}{2} = \dfrac{x}{\sqrt{2}} \\ \sin\dfrac{t}{2} = \dfrac{y}{2\sqrt{2}} \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{8} = 1}$$

La trajectoire est donc une **ellipse**.

2/ En dérivant les équations horaires par rapport au temps, on obtient les deux composantes du vecteur vitesse:

$$\vec{v}_x = \dot{x} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{t}{2}$$

$$\vec{v}_y = \dot{y} = \sqrt{2}\cos\frac{t}{2}$$

En dérivant les deux composantes du vecteur vitesse par rapport au temps, on obtient les deux composantes du vecteur accélération:

$$\vec{a}_x = \dot{v}_x = -\frac{\sqrt{2}}{4}\cos\frac{t}{2}$$

$$\vec{a}_y = \dot{v}_y = -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{t}{2}$$

Ecrivons à présent l'expression vectorielle de l'accélération pour trouver sa relation avec le vecteur position:

$$\vec{a} = -\frac{1}{4}x.\vec{i} - -\frac{1}{4}y.\vec{j} \Rightarrow \vec{a} = -\frac{1}{4}\left(x.\vec{i} - y.\vec{j}\right)\ ;\ \boxed{\vec{a} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{OM}}$$

Puisque la trajectoire est une ellipse, le mouvement va se répéter à l'infini pour une variation du temps de 0 à ∞.

Soit T l'intervalle de temps séparant deux passages consécutifs du mobile par la même position et dans le même sens.

L'abscisse du mobile au temps t est: $x = \sqrt{2}\cos\frac{t}{2}$

L'abscisse du mobile au temps $t+T$ est: $x' = \sqrt{2}\cos\frac{(t+T)}{2}$

Puisque le mouvement est périodique il faut que $x = x'$:

$$\cos\alpha = \cos(\alpha + 2\pi) \; ; \quad \cos\frac{t}{2} = \cos\frac{(t+T)}{2} \Rightarrow \frac{T}{2} = 2\pi \Rightarrow \boxed{T = 4\pi}$$

3/ Position du mobile et ses coordonnées pour une accélération de module $\frac{\sqrt{5}}{4}$:

$$a = \frac{\sqrt{5}}{4},$$

$$a^2 = \frac{2}{16}\cos^2\frac{t}{2} + \frac{2}{4}\sin^2\frac{t}{2} = \frac{5}{16} \Rightarrow 2\cos^2\frac{t}{2} + 8\sin^2\frac{t}{2} = 5$$

$$2\left(1 - \sin^2\frac{t}{2}\right) + 8\sin^2\frac{t}{2} = 5 \Rightarrow 6\sin^2\frac{t}{2} = 3 \Rightarrow \sin^2\frac{t}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\sin\frac{t}{2} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \; , \; t \succ 0 \; ; \quad \frac{t}{2} = \left| \begin{array}{l} +\frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ +\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{array} \right.$$

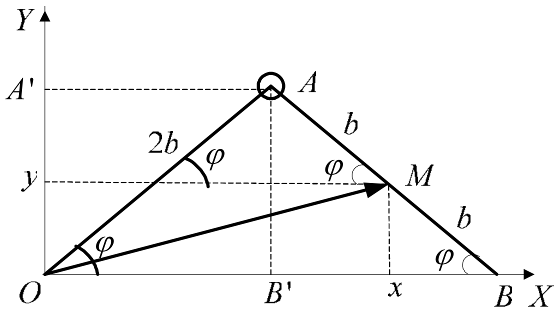
En prenant en considération la condition $0 \le t \le 4\pi$ soit $k \prec 2$, nous résumons les résultats dans le tableau suivant:

k	t	x	y	v_x	v_y
0	$\frac{\pi}{2}$	$+1$	$+2$	$-\frac{1}{2}$	$+1$
1	$\frac{3\pi}{2}$	-1	$+2$	$-\frac{1}{2}$	-1

Exercice 4.7:

1/ A l'aide de la figure ci-dessous on écrit l'expression du vecteur position:

$$\overrightarrow{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j}$$



Il reste à déterminer les deux équations horaires, c'est-à-dire les coordonnées en fonction du temps, tout en sachant que $\varphi = \omega t$:

$$x = \overline{OB'} + b\cos\varphi \ , \ x = 2b\cos\varphi + b\cos\varphi \Rightarrow \ x = 3b\cos\varphi$$

$$y = \overline{OA'} - b\sin\varphi \ , \ y = 2b\sin\varphi - b\sin\varphi \ \Rightarrow y = b\sin\varphi$$

$$\overrightarrow{OM} = \vec{i}.3b\cos\varphi + \vec{j}.b\sin\varphi$$

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \vec{i}.3b\cos\omega t + \vec{j}.b\sin\omega t}$$

On en déduit l'équation de la trajectoire par élimination du temps entre les équations horaires:

$$\left.\begin{array}{l} x^2 = 9b^2\cos^2\varphi \\ y^2 = b^2\sin^2\varphi \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{9b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$ C'est l'équation d'une ellipse.

2/ La première dérivée du vecteur position par rapport au temps nous conduit à l'expression du vecteur vitesse:

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \omega\left(-\vec{i}.3b.\sin\omega t + \vec{j}.b.\cos\omega t\right)$$

Le module de la vitesse au temps t est : $\boxed{v = \pm b\omega\sqrt{9\sin^2\omega t + \cos^2\omega t}}\left(ms^{-1}\right)$

Le module de la vitesse au temps $t = 0$ est : $\boxed{v = \pm b\omega}\,(ms^{-1})$

La deuxième dérivée du vecteur position par rapport au temps nous conduit à l'expression du vecteur accélération:

$$\vec{a} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \omega^2\left(\vec{i}.3b.\cos\omega t + \vec{j}.b.\sin\omega t\right) \ \Leftrightarrow \ \vec{a} = -\omega^2.\overrightarrow{OM}$$

D'où le module de cette accélération:

$$a^2 = 9b^2.\omega^2.\cos^2\omega t + b^2.\omega^2.\sin^2\omega t \Rightarrow \boxed{a = \pm b\omega^2\sqrt{9\cos^2\omega t + \sin^2\omega t}}\left(ms^{-2}\right)$$

Le module de l'accélération au temps $t = 0$ est :

$$a = \pm b\omega^2\sqrt{9\cos^2 0 + \sin^2 0} \Rightarrow \boxed{a = \pm 3b\omega^2}(ms^{-2})$$

EXERCICES

تمـاريـن

Exercice 4.1 Le mouvement rectiligne d'un point est défini par l'équation horaire : $s=2t^3-9t^2+12t+1$. a/ Calculer la vitesse et l'accélération à la date t. b/ Etudier le mouvement du point lorsque t croît de 0 à $+\infty$.(Dire dans quel sens se déplace le point et si le mouvement est accéléré ou retardé).	**التمرين1.4** الحركة المستقيمة لنقطة مادية محددة بالمعادلة الزمنية: $s=2t^3-9t^2+12t+1$ ا/ أحسب السرعة و التسارع في اللحظة t. ب/ أدرس حركة النقطة لمّا يزداد الزمن t من 0 إلى $+\infty$.(وضّح في أي اتجاه تنتقل النقطة و هل الحركة متسارعة أو متباطئة).

Exercice 4.2 Déterminer la trajectoire du mouvement plan défini par les équations : $x=\sin^2 t \;;\; y=1+\cos 2t$ Dessiner cette trajectoire dans le repère Oxy.	**التمرين:2.4** عيّن مسار الحركة المستوية المعرّفة بالمعادلتين: $x=\sin^2 t \;;\; y=1+\cos 2t$. أرسم هذا المسار في المعلم Oxy.

Exercice 4.3 Dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, le mouvement d'un mobile M est défini par les équations suivantes: $x=t^3-3t \;;\; y=-3t^2 \;;\; z=t^3+3t$ a/ Calculer les coordonnées à la date t, du vecteur vitesse $\vec{v}$, et celles du vecteur accélération $\vec{a}$, du mobile M. b/ Calculer la norme du vecteur $\vec{v}$ et montrer que ce vecteur fait un angle constant avec Oz.	**تمرين3.4** في معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، تحدّد الحركة لمتحرّك M بالمعادلات التالية: $x=t^3-3t \;;\; y=-3t^2 \;;\; z=t^3+3t$ ا/ أحسب في اللحظة t إحداثيات شعاع السرعة $\vec{v}$ ، و شعاع التسارع $\vec{a}$ ، للمتحرّك M. ب/ أحسب طويلة الشعاع $\vec{v}$ و بيّن أن هذا الشعاع يصنع زاوية ثابتة مع Oz.

Exercice4.4 Un point est mobile dans le plan à partir de la date $t=1$. Ses équations horaires sont: $x=\ln t \;;\; y=t+\frac{1}{t}$. a/Ecrire l'équation de la trajectoire. b/ Calculer les valeurs algébriques de la vitesse et de l'accélération au temps t.	**تمرين 4.4** تنتقل نقطة في مستوى ابتداء من اللحظة $t=1$. معادلتاه الزمنيتان هما: $x=\ln t \;;\; y=t+\frac{1}{t}$ ا/ أكتب معادلة المسار. ب/ أحسب القيم الجبرية للسرعة و التسارع في اللحظة t.

Exercice 4.5

Dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, un mobile M décrit dans le sens direct l'ellipse d'équation: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Le point M est repéré sur l'ellipse par l'angle φ.

Déterminer les vecteurs vitesse et accélération $\vec{v}$ et $\vec{\gamma}$ en fonction des dérivées $\dot{\varphi}$ et $\ddot{\varphi}$.

التمرين5.4

في معلم متعامد و متجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\right)$، يرسم متحرّك في الاتجاه المباشر نصف قطع زائد معادلته $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. تعيّن النقطة M على القطع الزائد بالزاوية φ. حدّد شعاعي السرعة $\vec{v}$ و التسارع $\vec{\gamma}$ بدلالة المشتقتين $\dot{\varphi}$ و $\ddot{\varphi}$.

Exercice 4.6

Soit, dans un plan (P), un repère orthonormé xOy et un mobile M se déplaçant dans ce plan. A la date t , ses coordonnées sont définies par:

$$x=\sqrt{2}\cos\frac{t}{2}\quad ;\quad y=2\sqrt{2}\sin\frac{t}{2}$$

a/ Quelle est la trajectoire ?

b/ Calculer les coordonnées à la date t du vecteur vitesse $\vec{v}$ et du vecteur accélération $\vec{a}$ de ce mobile. Quelle relation y a- t- il entre $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{a}$? Au bout de combien de temps le mobile repasse-il par une même position sur la courbe ?

c/ Entre les dates $t_1=0$ et $t_2=4\pi$, déterminer les positions du mobile et les coordonnées de $\vec{v}$ pour avoir un vecteur accélération de longueur $\frac{\sqrt{5}}{4}$.

التمرين 6.4

ليكن في مستوى (P)، معلم متعامد و متجانس xOy و متحرّك M ينتقل في هذا المستوى. في اللحظة t ، إحداثياته معرفتان بـ:

$$x=\sqrt{2}\cos\frac{t}{2}\quad ;\quad y=2\sqrt{2}\sin\frac{t}{2}$$

ا/ما هو مساره؟

ب/ أحسب إحداثيات شعاع السرعة $\vec{v}$ و شعاع التسارع $\vec{a}$ لهذا المتحرّك في اللحظة t. ما هي العلاقة الموجودة بين $\overrightarrow{OM}$ و $\vec{a}$ ؟ ما هي المدة اللازمة حتى يمرّ المتحرك من نفس الموضع من المنحنى ؟

ج/ بين اللحظتين $t_1=0$ و $t_2=4\pi$ ، حدّد مواقع المتحرّك و كذا إحداثيتي $\vec{v}$ حتى تكون طويلة التسارع $\frac{\sqrt{5}}{4}$.

Exercice 4.7

Un coude OA articulé en A, tourne dans un plan (Oxy) avec une vitesse angulaire ω constante. On donne $OA=AB=2b$.

On considère un point M situé sur la partie AB tel que $AM=b$.

1/ Trouver l'équation de la trajectoire du point M . Quelle est son allure ?

2/ Ecrire les vecteurs vitesse et accélération instantanés et calculer leur module au temps $t=0$.

التمرين 7.4

يدور مرفق OA متمفصل في A في مستوى (Oxy) بسرعة ثابتة ω . تعطى $OA=AB=2b$.

نعتبر نقطة M واقعة على الجزء AB بحيث $OA=AB=2b$.

1/ أوجد معادلة مسار النقطة M. ما شكله؟

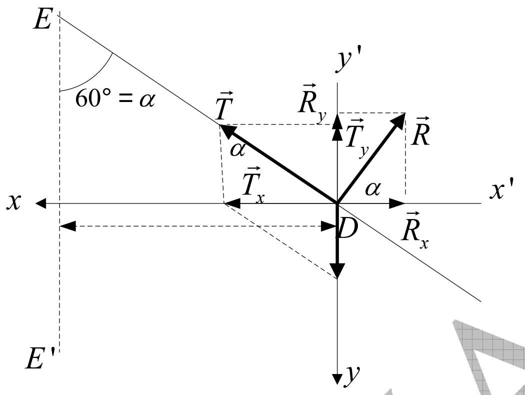
2/ أكتب شعاعي السرعة و التسارع اللحظيين و احسب شدتيهما في اللحظة M .

Corrigés des exercices de 5.1 à 5.20 — حلول التمارين من 1.5 إلى 20.5

Exercice 5.1:

a/ $\boxed{v = \omega r}$; $\boxed{v = 4,1ms^{-1}}$

b/



$$\boxed{R = m\left(g.\sin\alpha - \omega^2.r.\cos\alpha\right)} \; ; \; \boxed{R = 37N}$$

c/

$$T = \frac{R.\cos\alpha + m\omega^2 r}{\sin\alpha} \rightarrow \boxed{T = 46,4N}$$

$$T = \frac{P - R.\sin\alpha}{\cos\alpha} \rightarrow \boxed{T = 43.42N}$$

La différence entre les deux valeurs de la tension est due à la valeur approchée que nous avons prise pour chaque cas.

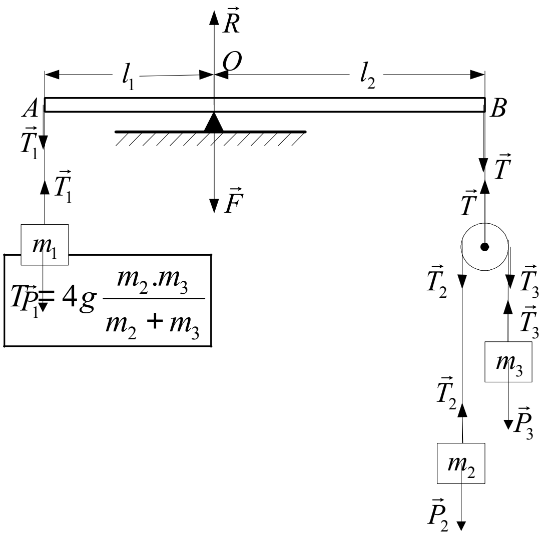
d/ $\boxed{\omega = \sqrt{\frac{g}{l\cos\alpha}}}$, $\boxed{\omega = 2,1rad.s^{-1}}$

Exercice 5.2:

1/

$$\left.\begin{array}{l} P_3 - T_3 = m_3.a \\ -P_2 + T_2 = m_2.a \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{a = \frac{m_3 - m_2}{m_2 + m_3} g}$$

$$\left.\begin{array}{l} P_3 - T_3 = m_3.a \Rightarrow T_3 = m_3\left(g - a\right) \\ -P_2 + T_2 = m_2.a \Rightarrow T_2 = m_2\left(g + a\right) \\ a = \dfrac{m_3 - m_2}{m_2 + m_3} g \\ T = T_2 + T_3 \;\; , \;\; T = m_2\left(g + a\right) + m_3\left(g - a\right) \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{T = 4g\frac{m_2.m_3}{m_2 + m_3}}$$



Pour m_1 : $P_1 = T_1$

D'après le théorème des moments:

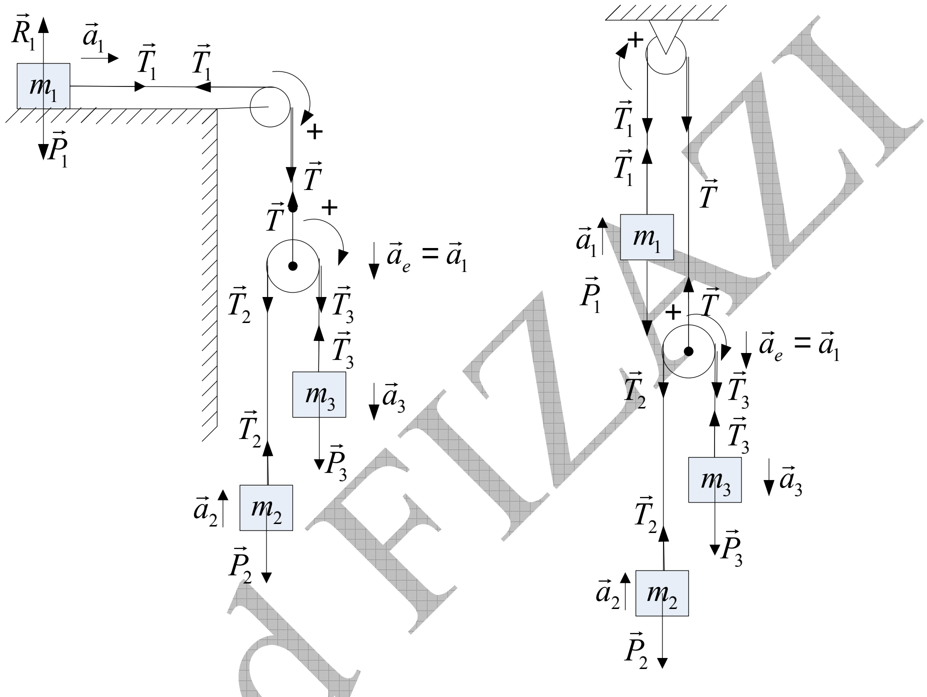
$\tau_{\vec{T}/\Delta} = \tau_{\vec{T}_1/\Delta} \Rightarrow T_1.l_1 = T.l_2$

$$m_1 g.l_1 = 4g\frac{m_2.m_3}{m_2+m_3}.l_2 \Rightarrow \boxed{m_1\left(m_2+m_3\right).l_1 = 4m_2m_3.l_2}$$

2/ $$\vec{R} = \vec{T}_1 + \vec{T} \Rightarrow \boxed{R = g\left(m_1 + \frac{4m_2m_3}{m_2+m_3}\right)}$$

Exercice 5.3:

Premier cas : (voir figure ci-dessous).



Premier cas **Deuxième cas**

$$\boxed{a_r = \frac{2m_3 g - 2m_3 a_1 - m_1 a_1}{2m_3}}$$

$$\boxed{a_1 = \frac{4m_2m_3}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3}g}$$

$$\boxed{a_r = \frac{m_3m_1 - m_1m_2}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3}g}$$

$$\boxed{a_2 = \frac{m_3m_1 - m_1m_2 - 4m_2m_3}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3}g}$$

$$\boxed{a_3 = \frac{m_3m_1 - m_1m_2 + 4m_2m_3}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3}g}$$

Deuxième cas: (voir figure ci-dessus)

$$\boxed{a_r = \frac{(m_1 - 2m_2)g + (m_1 + 2m_2)a_1}{2m_2}}$$

$$\boxed{a_1 = \frac{4m_2m_3 - m_1m_2 - m_1m_3}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3}g}$$

$$\boxed{a_r = \frac{2m_3m_1 - 2m_1m_2}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3}g}$$

$$\boxed{a_2 = \frac{3m_3m_1 - m_1m_2 - 4m_2m_3}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3}g}$$

$$\boxed{a_3 = \frac{4m_2m_3 - m_1m_3 - 3m_1m_2}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3}g}$$

Exercice 5.4:

a/

$$\boxed{\tan\theta_0 = \mu} \quad , \quad \tan\theta_0 = 0,80 \Rightarrow \boxed{\theta_0 = 38,66°}$$

b/

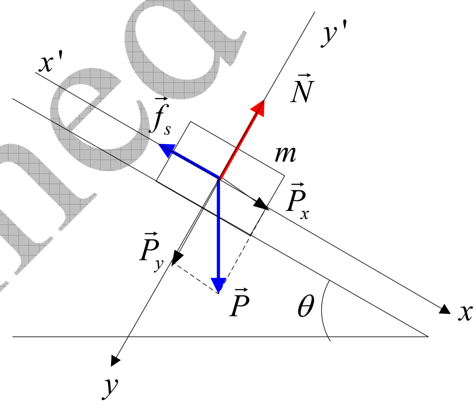
$$\boxed{f_{s,\max} = \mu N} \quad , \quad \boxed{f_{s,\max} = 3,13N}$$

c/

$$\boxed{N = P_y = mg\cos\theta} \quad , \quad \boxed{N = 4,1N}$$

d/

$$\boxed{f_s = P_x = mg\sin\theta} \quad , \quad \boxed{f_s = 2,87N}$$



Exercice 5.5:

a/

$$\boxed{\theta_0 = 21,8°}$$

b/

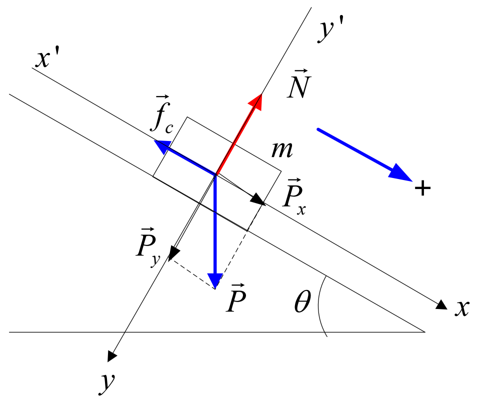
$$\boxed{N = 6,55N}$$

c/

$$\boxed{f_c = \mu_c N} \quad ; \quad \boxed{f_c = 2,62N}$$

d/

$$\boxed{a = 2,46 ms^{-2}}$$



Exercice 5.6:

a/

$$a = \frac{F}{m_A + m_B} = -\mu_s g \Rightarrow \boxed{F = \mu_s \left(m_A + m_B\right) g} \; , \; \boxed{F = 15,7N}$$

(a) (b)

b/

$$\left.\begin{array}{l} \vec{P} + \vec{N} = \vec{0} \\ F = \left(m_A + m_B\right) a \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{a = \frac{F}{\left(m_A + m_B\right)}} \; , \; \boxed{a = 1,96 ms^{-2}}$$

c/

(c) (d)

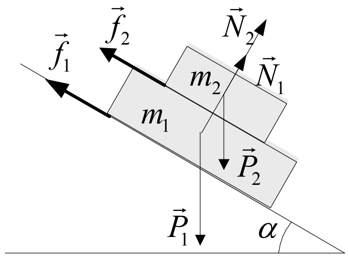
$$a' = \frac{\mu_c m_B g}{m_B} \Rightarrow \boxed{a' = -\mu_c g} \; , \; \boxed{a' = -0,98 ms^{-2}}$$

Le signe négatif indique que le corps est attiré dans le sens contraire de celui du mouvement.

$$\boxed{a'' = \frac{F - \mu_c m_B g}{m_B}} \; , \; \boxed{a'' = +0,98 ms^{-2}}$$

Le signe plus indique que le corps B est attiré dans le sens du mouvement.

Exercice 5.7:



$$\boxed{a_1 = g\left(\sin\alpha - h_1\cos\alpha\right) - \frac{m_2}{m_1} g\cos\alpha\left(h_2 + h_1\right)} \rightarrow \boxed{a_1 = 3,53 ms^{-2}}$$

$$\boxed{a_2 = g\left(\sin\alpha - h_2\cos\alpha\right)} \rightarrow \boxed{a_2 = 7,79 ms^{-2}}$$

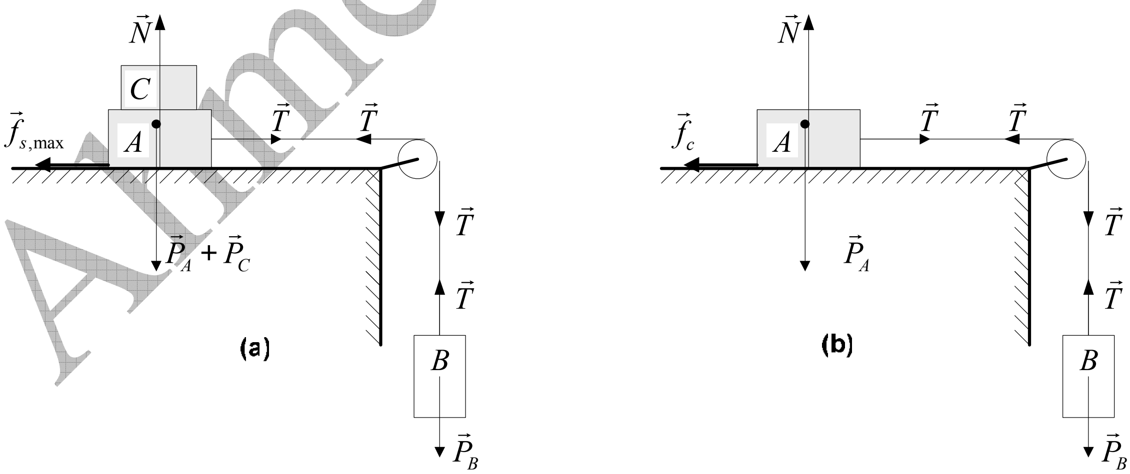
$$\boxed{a_1 = g\left(\sin\alpha - h_1\cos\alpha\right) - \frac{m_2}{m_1} g\cos\alpha\left(h_2 + h_1\right)} \rightarrow \boxed{a_1 = 3,53 ms^{-2}}$$

$$\boxed{a_2 = g\left(\sin\alpha - h_2\cos\alpha\right)} \rightarrow \boxed{a_2 = 7,79 ms^{-2}}$$

Exercice 5.8:

$$\boxed{m_C = \frac{\left(m_B - \mu_s m_A\right)}{\mu_s}}, \quad \boxed{m_C = 15 kg}$$

$$\boxed{a = \frac{\left(m_B - \mu_c m_A\right) g}{m_B + m_A}}, \quad \boxed{a = 1.36 ms^{-2}}$$



Exercice 5.9:

I/ **Lancement dans le vide**:

1/

$$\boxed{\vec{a} = \vec{g} = -g.\vec{u}_z}$$

2/

$$\vec{v} = v_x.\vec{u}_x + v_z.\vec{u}_z \Rightarrow \boxed{\vec{v} = v_0.\cos\theta.\vec{u}_x + \left(-gt + v_0 \sin\theta\right).\vec{u}_z}$$

3/

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \left(\underbrace{v_0.\cos\theta.t}_{x}\right).\vec{u}_x + \left(\underbrace{-\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin\theta.t}_{z}\right).\vec{u}_z}$$

4/

$$x_{\max} = \frac{2v_0^2.\sin\theta.\cos\theta}{g} \quad , \quad \boxed{x_{\max} = \frac{v_0^2.\sin 2\theta}{g}}$$

5/

$$\boxed{z_{\max} = \frac{v_0^2.\sin^2\theta}{2g}}$$

II/ Lancement dans l'air:

1/

$$\boxed{\vec{P} + \vec{f} = m\vec{a}}$$

2/

$$\boxed{\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{k}{m}\vec{v} = \vec{g}}$$

3/

$$\vec{v} = \vec{A}e^{-\frac{k}{m}t} + \vec{g}\frac{m}{k}$$

$$\boxed{\vec{v} = \left(\vec{v}_0 - \vec{g}\frac{m}{k}\right)e^{-\frac{k}{m}t} + \vec{g}\frac{m}{k}}$$

$$\boxed{\vec{v}_L = \vec{g}\frac{m}{k}}$$

$$\boxed{\vec{v} = \left(\vec{v}_0 - \vec{g}\frac{m}{k}\right)e^{-\frac{k}{m}t} + \vec{g}\frac{m}{k}} \Leftrightarrow \boxed{\vec{v} = \left(\vec{v}_0 - \vec{v}_L\right)e^{-\frac{k}{m}t} + \vec{v}_L}$$

$$\vec{v}_0 = v_0 \cos\theta.\vec{u}_x + v_0 \sin\theta.\vec{u}_z \quad ; \quad \boxed{\vec{v} = \underbrace{\left(v_0 \cos\theta\right)e^{-\frac{k}{m}t}}_{v_x}\vec{u}_x + \left[\underbrace{-v_L + \left(v_0 \sin\theta + v_L\right)e^{-\frac{k}{m}t}}_{v_z}\right]\vec{u}_z}$$

4/

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \left(\vec{v}_0 - \vec{v}_L\right)\frac{m}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) + \vec{v}_L.t}$$

$$\boxed{x(t) = \frac{m}{k}v_0 \cos\theta\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)} \quad , \quad \boxed{z(t) = \frac{m}{k}\left(v_0 \sin\theta + v_L\right)\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) - v_L.t}$$

5/

$$\boxed{t_s = \frac{k}{m}\ln\left(1 + \frac{v_0}{v_L}\sin\theta\right)}$$

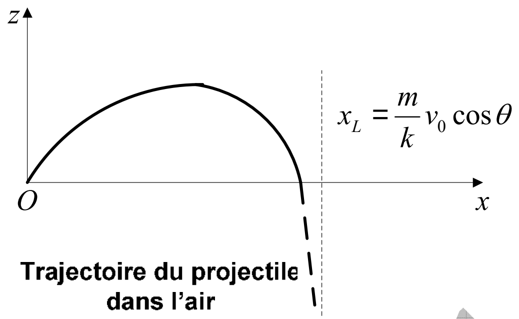
$$\boxed{x_s = \frac{m}{k} v_0 \cos\theta \left(1 - \frac{1}{1 + \dfrac{v_0}{v_L} \sin\theta} \right)} \; ; \; \boxed{z_s = \frac{m}{k} v_0 \sin\theta - v_L \frac{m}{k} \ln\left(1 + \frac{v_0}{v_L} \sin\theta \right)}$$

$$\boxed{x(t) = \frac{m}{k} v_0 \cos\theta \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right)} \; , \; \boxed{z(t) = \frac{m}{k} \left(v_0 \sin\theta + v_L \right) \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right) - v_L . t}$$

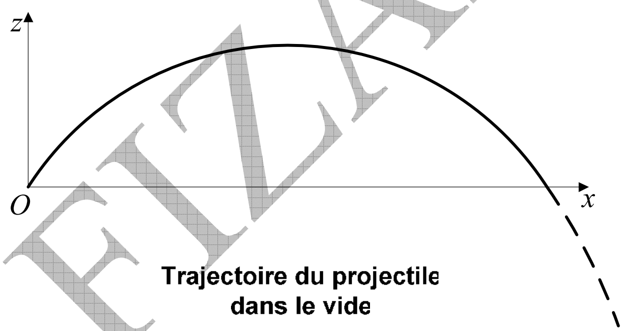
6/
$$z(t)_{t\to\infty} = \underbrace{\frac{m}{k}\left(v_0 \sin\theta + v_L \right)}_{B} - v_L . t \Rightarrow z(t)_{t\to\infty} = -v_L . t + B$$

Lorsque $t \to \infty$ le mouvement du projectile devient rectiligne uniforme, donc la trajectoire a une asymptote quand $t \to \infty$

III. **Synthèse graphique:** les deux graphes montrent la trajectoire dans les deux cas considérés.



Trajectoire du projectile dans l'air



Trajectoire du projectile dans le vide

Exercice 5.10:

1/Le mouvement en présence de frottement:

$$\boxed{\frac{dv}{dt} - \frac{\mu}{R} v^2 = g\left(\sin\theta - \mu \cos\theta \right)}$$

2/ **Mouvement sans frottement:**

a/

$$\boxed{v = \sqrt{2Rg\left(1 - \cos\theta \right)}}$$

b/

$$\boxed{N = mg\left(3\cos\theta - 2 \right)}$$

$$\cos\theta_0 = 2/3 \Rightarrow \boxed{\theta_0 = 48°}$$

Discussion: D'après l'expression obtenue, l'angle θ_0 ne dépend ni de la masse de la particule, ni du rayon de la sphère, ni de l'accélération de pesanteur, *avec pour condition :la vitesse initiale* $v(0)$ *nulle.*

N.B: $v_0 \neq v(0)$, v_0 étant la vitesse avec laquelle la particule quitte la surface de la sphère alors que $v(0)$ est la vitesse initiale au point M_0.

$$\boxed{\cos\theta_0 = \frac{2}{3} + \frac{v(0)^2}{3Rg}}$$

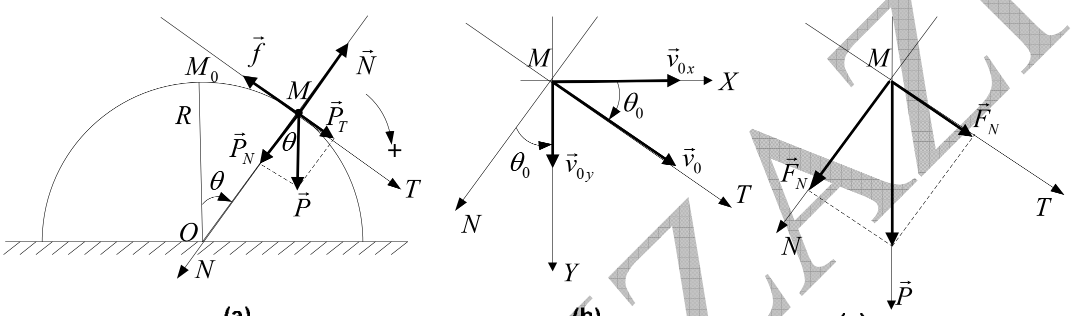
Dans ce cas l'angle θ_0 dépend de $v(0)$, R et g mais reste indépendant de m .

c/

$$v_0 = \sqrt{2Rg(1-2/3)} \;,\; \boxed{v_0 = 3,65ms^{-1}}$$

3/ Etude du mouvement lorsque la particule quitte la surface de la sphère.

$$\boxed{v = \sqrt{g^2t^2 + 2gv_0\sin\theta_0.t + 2Rg(1-\cos\theta_0)}}$$



(a) (b) (c)

$$\boxed{\vec{v} = v_0.\cos\theta_0.\vec{i} + (gt + v_0\sin\theta_0)\vec{j}}$$

b/ **Force tangentielle:**

$$F_T = m.a_T = m\frac{dv}{dt} \Rightarrow \boxed{F_T = \frac{mg(gt + v_0\sin\theta_0)}{\sqrt{g^2t^2 + 2gv_0\sin\theta_0.t + v_0^2}}}$$

Force normale: Il n'est pas conseillé d'appliquer la formule $F_N = m\frac{v^2}{r}$ car le rayon de courbure est inconnu, à ne pas confondre avec le rayon R de la sphère !!

$$\vec{P} = \vec{F}_N + \vec{F}_T \Rightarrow \boxed{F_N = \sqrt{P^2 - F_T^2}}$$

$$\boxed{F_N = mg\sqrt{1 - \frac{g^2t^2 + 2gv_0\sin\theta_0.t + v_0^2\sin^2\theta_0}{g^2t^2 + 2gv_0\sin\theta_0.t + v_0^2}}}$$

Exercice 5.11:

a/ $\boxed{g_T = 1,08.10^{-2}\,N.kg^{-1}}$

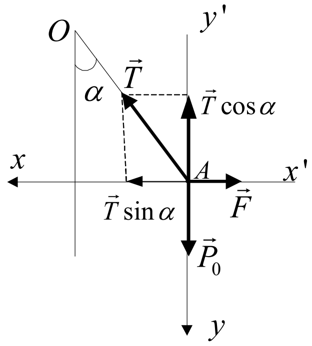
b/ $\boxed{g_L = 1,33.10^{-4}\,N.kg^{-1}}$

c/ $\boxed{g_R = g_T - g_L}$, $\boxed{g_R = 1,07.10^{-2}\,N.kg^{-1}}$

d/ $\boxed{r = 345000km}$

Exercice 5.12:

$$\boxed{l_1 = \frac{l_0}{\cos\alpha}} \ ; \ \boxed{l_2 = l_0 tg\alpha}$$



Exercice 5.13:

a/

$$\boxed{\vec{F} = 36\vec{i} - 144t.\vec{j}}$$

b/

$$\vec{\tau} = \vec{r} \wedge \vec{F} \Rightarrow \boxed{\vec{\tau} = \left(432t^2 + 288t\right)\vec{i} + \left(108t + 72\right)\vec{j} + \left(-288t^3 + 864t^2\right)\vec{k}}$$

c/

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{v} = \left(36t - 36\right)\vec{i} - 72t^2.\vec{j} + 18\vec{k}}$$

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p} \Rightarrow \boxed{\vec{L} = \left(144t^3 + 144t^2\right)\vec{i} + \left(54t^2 + 72t + 72\right)\vec{j} + \left(72t^4 + 288t^3\right)\vec{k}}$$

d/ Vérifions que $\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$:

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = 36\vec{i} - 144t.\vec{j} = \vec{F}}$$

Vérifions que $\vec{\tau} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$:

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \left(432t^2 + 288t\right)\vec{i} + \left(108t + 72\right)\vec{j} + \left(-288t^3 + 864t^2\right)\vec{k} = \vec{\tau}}$$

Exercice 5.14:

1/ $$\boxed{\vec{v} = l\dot{\theta}\vec{u}_\theta}$$

2/

$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p}_O = \begin{vmatrix} \vec{u}_r & -\vec{u}_\theta & \vec{u}_z \\ r = l & 0 & 0 \\ 0 & ml\dot{\theta} & 0 \end{vmatrix} \ ; \ \boxed{\vec{L}_O = ml^2\dot{\theta}.\vec{u}_z}$$

$$\vec{\tau}_O = \left(\underbrace{\overrightarrow{OM} \wedge \vec{T}}_{\vec{0}}\right) + \left(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{P}\right) \Rightarrow \vec{\tau}_O = \boxed{\vec{\tau}_O = -mgl\sin\theta.\vec{u}_z}$$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0}$$

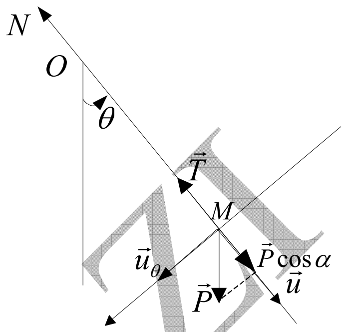
$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p} \ ; \ \boxed{\vec{L}_O = m\left(x\dot{y} - y\dot{x}\right)\vec{k}}$$

$$\vec{\tau}_O = \left(\underbrace{\overrightarrow{OM} \wedge \vec{T}}_{0}\right) + \left(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{P}\right) \ ; \ \boxed{\vec{\tau}_O = mgx.\vec{k}}$$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{\tau}_0 \quad ; \quad \boxed{x\ddot{y} - y\ddot{x} = gx}$$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0}$$

Appliquons maintenant la relation fondamentale de la dynamique:



$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0}$$

Les équations obtenues sont parfaitement identiques.

3/

$$\boxed{\left|\dot{\theta}\right| = \theta_0\sqrt{\frac{g}{l}}} \qquad \boxed{T = mg\left(1 + \dot{\theta}_0^2\right)}$$

Exercice 5.15:

$$\boxed{\vec{L}_{G/O} = 2ma^2\dot{\theta}_1^2} \quad \boxed{\vec{L}_{A/G} = md^2\dot{\theta}_2^2 = \vec{L}_{B/G}} \quad \boxed{\vec{L}_O = 2m\left(a^2\dot{\theta}_1^2 + d^2\dot{\theta}_2^2\right)}$$

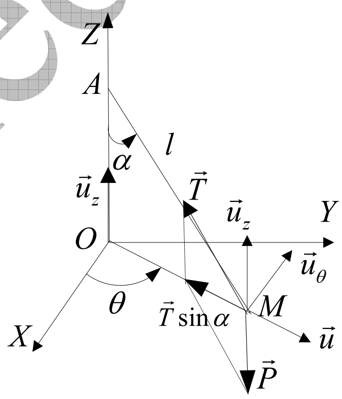
Exercice 5.16:

1/ $\boxed{T = m\omega^2 l}$ $\quad \boxed{\cos\alpha = \frac{g}{\omega^2 l}}$

2/

$$\vec{L}_{M/A} = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{v} = \boxed{\vec{L}_{M/A} = ml^2\omega\sin\alpha\left(\cos\alpha.\vec{u}_r + \sin\alpha.\vec{u}_z\right)}$$

$$\boxed{\vec{F} = m\omega^2 l\sin\alpha.\vec{u}_r}$$



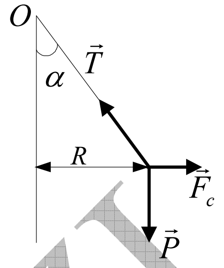
$$\vec{L}_{M/A} = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{v} = \boxed{\vec{L}_{M/A} = ml^2\omega\sin\alpha\left(\cos\alpha.\vec{u}_r + \sin\alpha.\vec{u}_z\right)}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_{M/A}}{dt} = ml^2\omega^2\sin\alpha.\cos\alpha.\vec{u}_\theta}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_{M/A}}{dt} = \vec{\tau}_{M/A}}$$

Exercice 5.17:

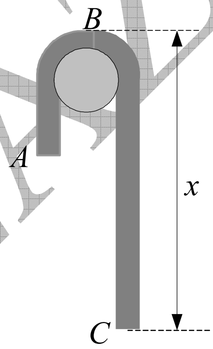
1/ Le train en abordant un virage circulaire, son mouvement devient circulaire vers la gauche, car la force centrifuge attire le pendule vers la droite.



2/ $$\boxed{R = \frac{v^2}{g.\tan\alpha}} \quad \boxed{R = 631N}$$

3/ $$\boxed{\theta = \frac{d}{R}} \; , \; \boxed{\theta \approx 91°}$$

Exercice 5.18:



$$\boxed{\ddot{x} - \frac{2g}{L}x = -g} \quad \boxed{a = \frac{g}{3}}$$

$$\ddot{x} - \frac{2g}{L}x = -g \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{2g}{L}x - g \Rightarrow \frac{dv}{dt}dx = \left(\frac{2g}{L}x - g\right)dx$$

$$\frac{dx}{dt}dv = \left(\frac{2g}{L}x - g\right)dx \Rightarrow v.dv = \left(\frac{2g}{L}x - g\right)dx$$

$$\int_0^v v.dv = \int_b^x \left(\frac{2g}{L}x - g\right)dx \Rightarrow \frac{1}{2}v^2 = \left(\frac{g}{L}x^2 - gx\right)\Big|_b^x$$

$$\boxed{v^2 = 2\frac{g}{L}x^2 - 2gx - 2\frac{g}{L}b^2 + 2gb}$$

$$x = \frac{2}{3}L \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{2g}{L}\left(-b^2 + bL - \frac{2}{9}L^2\right)}}$$

Exercice 5.19:

1/ $$\tan\alpha = \frac{r}{z} = \frac{r_0}{z_0} \Rightarrow \boxed{z = r\frac{z_0}{r_0}}$$

2/ D'après le cours, nous savons que l'accélération du point M en coordonnées cylindriques est:

$$\vec{a} = \left(\underbrace{\ddot{r} - r\dot{\theta}^2}_{a_r}\right)\vec{u}_r + \left(\underbrace{r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}}_{a_\theta}\right)\vec{u}_\theta + \underbrace{\ddot{z}}_{a_z}\vec{u}$$

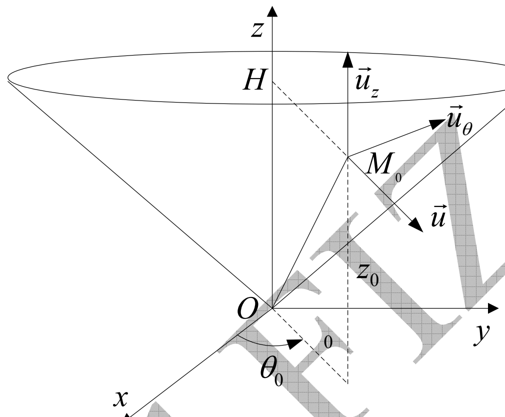
Si le point reste sur la surface du cône: $\ddot{z} = \ddot{r}\frac{z_0}{r_0}$. Les forces agissant sur le point matériel sont son poids $\vec{P}$, à composante unique $\vec{P} = -mg\vec{u}_z$, et la force de réaction $\vec{R}$ de la surface qui a deux composantes $\vec{R} = \vec{R}_r + \vec{R}_z = -R\cos\alpha.\vec{u}_r + R\sin\alpha.\vec{u}_z$.

Appliquons la relation fondamentale de la dynamique, puis projetons les deux forces sur les trois axes du repère cylindrique. Nous obtenons:

$$\vec{P}+\vec{R}=m\vec{a}=\vec{F}$$
$$\vec{F}=\vec{F}_r+\vec{F}_\theta+\vec{F}_z=m\left(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2\right)\vec{u}_r+m\left(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta}\right)\vec{u}_\theta+m\ddot{z}\vec{u}_z\rightarrow(1)$$
$$\vec{F}=-R\cos\alpha.\vec{u}_r+R\sin\alpha.\vec{u}_z-mg\vec{u}_z$$
$$\vec{F}=-R\cos\alpha.\vec{u}_r+\left(R\sin\alpha-mg\right)\vec{u}_z\rightarrow(2)$$

Par identification des deux équations (1) et (2) on obtient trois équations à trois inconnues:

$$\begin{cases}-R\cos\alpha=m\left(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2\right)\rightarrow(3)\\ 0=m\left(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta}\right)\rightarrow(4)\\ -mg+R\sin\alpha=m\dfrac{z_0}{r_0}\ddot{r}\rightarrow(5)\end{cases}$$



3/ De l'équation (4) on en déduit l'équation $2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta}=0$, qui est la dérivée de la quantité $r^2\dot{\theta}$ par rapport au temps. Ceci nous conduit à $r^2\theta=C^{te}$:

$$\left(r^2\dot{\theta}\right)'=2\dot{r}r.\dot{\theta}+r^2\ddot{\theta}=0\Leftrightarrow r^2\dot{\theta}=C^{te}$$

Nous connaissons l'expression de la vitesse linéaire en coordonnées cylindriques à partir de laquelle nous déduisons la vitesse initiale:

$$v(t)=\dot{r}(t)\vec{u}_r+r(t)\dot{\theta}(t)\vec{u}_\theta+\dot{z}(t)\vec{u}_r\Rightarrow v(0)=\dot{r}(0)\vec{u}_r+r(0)\dot{\theta}(0)\vec{u}_\theta+\dot{z}(0)\vec{u}_r$$

L'intensité de la vitesse initiale est donc:

$$v(0)=\sqrt{\left[\dot{r}(0)\right]^2+\left[r(0)\dot{\theta}(0)\right]^2+\left[\dot{z}(0)\right]^2}$$

L'énoncé nous impose l'expression de $\dot{\theta}$ sans $\dot{r}(0)$ ni $\dot{z}(0)$. Ceci n'est possible que sous des conditions initiales de la forme $\dot{r}(0)=\dot{z}(0)=0$. C'est ce que nous admettons dans le reste de l'exercice. Partant de là, la vitesse initiale est:

$$v(0)=r(0)\dot{\theta}(0)$$

Suite à tout cela, nous pouvons poursuivre notre étude tel que:

$$r^2\dot{\theta} = C^{te} \Rightarrow r(t)^2\,\dot{\theta}(t) = r(0)^2\,\dot{\theta}(0)$$

$$\left.\begin{array}{l} \dot{\theta}(t) = \dfrac{r(0).r(0).\dot{\theta}(0)}{r(t)^2} \\ v(0) = r(0).\dot{\theta}(0) \\ v(0) = v_0 \;\;,\;\; r(0) = r_0 \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\dot{\theta} = \frac{r_0 v_0}{r^2}}$$

4/ L'équation (5) fait l'objet de cette question car elle renferme une fonction unique $r(t)$, contrairement aux équations (3) et (4) qui sont fonctions de $r(t)$ et $\theta(t)$ en même temps. De l'équation (3) nous pouvons écrire:

$$R = \frac{1}{\sin\alpha}\left[mg + m\frac{z_0}{r_0}\ddot{r}\right]$$

Remplaçons R par cette dernière expression dans l'équation (3) pour obtenir:

$$\ddot{r} - \underbrace{\frac{v_0^2 r_0^4}{r_0^2 + z_0^2}}_{A(r_0,v_0,z_0)}.\frac{1}{r^3} = -\underbrace{\frac{z_0 r_0}{r_0^2 + z_0^2}}_{A(r_0,z_0,g)} g \rightarrow (6)$$

5/ Si le mouvement est circulaire uniforme cela veut dire qu'à chaque instant $r(t) = r(0)$, en même temps que $\left(\dot{\theta}(t) = C^{te}\right)$. L'expression (4) devient:

$$\frac{v_1^2 r_0^4}{r_0^2 + z_0^2}.\frac{1}{r_0^3} = \frac{z_0 r_0}{r_0^2 + z_0^2} g \Rightarrow \frac{v_1^2}{r_0^2 + z_0^2} = \frac{z_0}{r_0^2 + z_0^2} g$$

La vitesse demandée est donc: $\boxed{v_1 = \sqrt{2gz_0}}$

6/ Multiplions l'équation (6) par $2\dot{}$ pour obtenir : $2\dot{r}\ddot{r} + A\dfrac{2\dot{r}}{r^3} = 2B\dot{r}$

La première intégration donne: $\int 2\dot{r}\ddot{r}d\dot{r} + \int A\dfrac{2\dot{r}}{r^3}d\dot{r} = \int 2B\dot{r}d\dot{r} \Rightarrow \dot{r}^2 - \dfrac{A}{r^2} = 2Br + C \rightarrow (7)$

Pour obtenir la constante C on doit revenir aux conditions initiales citées plus haut $\left[t = 0, \dot{r}(0) = 0\right]$:

$$0 - \frac{A}{r^2} = 2Br + C \Rightarrow \boxed{C = -\frac{A}{r^2} - 2Br}$$

L'équation (7) devient finalement:

$$\boxed{\dot{r}^2 = 2A\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_0^2}\right) + 2B(r - r_0)}$$

Exercice 5.20:

$$\vec{r}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;\;,\;\; \vec{v}\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \;\;,\;\; \vec{a}\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}\wedge\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{i} & -\vec{j} & \vec{k}\\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z}\\ B & 0 & 0\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ B\dot{z}\\ -B\dot{y}\end{pmatrix}$$

$$\vec{F}=q\left(\vec{E}+\vec{v}\wedge\vec{B}\right)=q\left(E\vec{k}+0\vec{i}+B\dot{z}\vec{j}-B\dot{y}\vec{k}\right)$$

$$\boxed{\vec{F}=q\left[0\vec{i}+B\dot{z}\vec{j}+\left(E-B\dot{y}\right)\vec{k}\right]}\rightarrow(1)$$

$$\vec{F}=\vec{F}_x+\vec{F}_y+\vec{F}_z\Rightarrow\boxed{\vec{F}=m\ddot{x}+m\ddot{y}+m\ddot{z}}\rightarrow(2)$$

:

$$\begin{cases}m\ddot{x}=0\\ m\ddot{y}=qB\dot{z}\\ m\ddot{z}=-q\left(E+B\dot{y}\right)\end{cases}$$

En tenant compte des conditions initiales:

$t=0$:

$x(0)=0\ ,\ y(0)=0\ ,\ z(0)=0\ ,\ \dot{x}(0)=0\ ,\ \dot{y}(0)=0\ ,\ \dot{z}(0)=0$

$$\begin{cases}m\ddot{x}=0\Rightarrow\ddot{x}=0\Rightarrow\dot{x}=C^{te}=\dot{x}(0)=0\rightarrow(3)\\ m\ddot{y}=qB\dot{z}\Rightarrow\ddot{y}=\dfrac{q}{m}B\dot{z}\Rightarrow\dot{y}=\dfrac{q}{m}Bz\rightarrow(4)\\ m\ddot{z}=q\left(E-B\dot{y}\right)\Rightarrow\ddot{z}=\dfrac{q}{m}E-\dfrac{q}{m}B\dot{y}\rightarrow(5)\end{cases}$$

Dans l'équation différentielle (5) on remplace $\dot{y}$ par sa valeur tirée de l'équation (4):

$$\begin{cases}\dot{x}=0\rightarrow(6)\\ \dot{y}=\dfrac{q}{m}Bz\rightarrow(7)\\ \ddot{z}+\left(B\dfrac{q}{m}\right)^2z=\dfrac{q}{m}E\rightarrow(8)\end{cases}$$

En posant $\omega=B\dfrac{q}{m}$, l'équation (8) s'écrit :

$$\ddot{z}+\omega^2z=\frac{q}{m}E$$

Déterminons α et β à partir des conditions initiales en utilisant les deux équations:

$$z=\alpha\sin\omega t+\beta\cos\omega t+\frac{mE}{qB^2}$$

$$\dot{z}=\alpha\omega\cos\omega t-\beta\omega\sin\omega t$$

$$t=0\ ,\ z(0)=0\ ,\ \dot{z}(0)=0\Rightarrow\alpha=0\ ,\ \beta=-\frac{mE}{qB^2}$$

Nous obtenons à la fin l'expression $z(t)$:

$$z(t) = -\frac{mE}{qB^2}\cos\omega t + \frac{mE}{qB^2} \Rightarrow z(t) = \underbrace{\frac{mE}{qB^2}}_{a}\left(1 - \cos\underbrace{\omega t}_{\theta}\right)$$

$$\boxed{z(t) = a(1 - \cos\theta)}$$

Il nous reste à définir l'équation $y(t)$. Dans l'équation (7) on remplace z , puis on intègre pour arriver à l'expression $y(t)$:

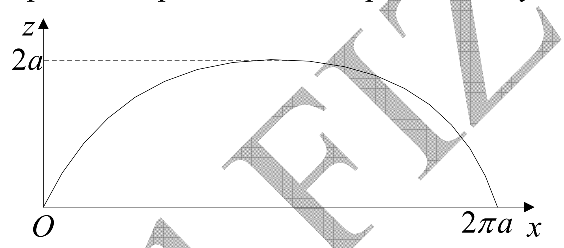
$$\dot{y} = \omega a(1 - \cos\theta) \Rightarrow \dot{y} = \omega a - \omega a \cos\underbrace{\omega t}_{\theta}$$

$$y(t) = a(\omega t - \sin\omega t) \Rightarrow \boxed{y(t) = a(\theta - \sin\theta)}$$

Finalement:

$$\begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = a(\theta - \sin\theta) \\ z(t) = a(1 - \cos\theta) \end{cases}$$

Se sont là les équations paramétriques caractéristiques d'une cycloïde.



EXERCICES
تــمــاريــن

Exercice 5.1

Un corps D de masse $5,5kg$ (figure ci-dessous) se déplace sans frottement sur la surface d'un cône ABC, en tournant autour de l'axe EE' avec une vitesse angulaire de $10 tours/mn$. Calculer :

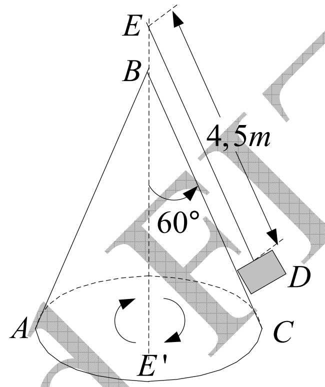
a/ la vitesse linéaire du corps,
b/ la réaction de la surface sur le corps,
c/ la tension du fil,
d/ la vitesse angulaire nécessaire pour rendre nulle la réaction du plan.

On prend $g = 9,8ms^{-2}$

تمرين 1.5

ينتقل جسم D كتلته $5,5kg$ بدون احتكاك على سطح مخروط ABC (الشكل في الأسفل)، و ذلك بدورانه حول المحور EE' بسرعة زاوية $10 tours/mn$.
أحسب:

ا/ السرعة الخطية للجسم،
ب/ رد فعل السطح على الجسم،
ج/ توتر الخيط،
د/ السرعة الزاوية اللازمة لكي ينعدم رد فعل المستوى. نأخذ $g = 9,8ms^{-2}$.



Exercice 5.2

En considérant les forces de frottement comme négligeables ainsi que la masse de la poulie,

1/ montrer que la barre AB dans la figure ci-dessous sera en équilibre à condition que l'équation suivante soit vérifiée :

$$m_1(m_2 + m_3)l_1 = 4m_2m_3l_2,$$

2/ trouver la force que le couteau exerce sur la barre.

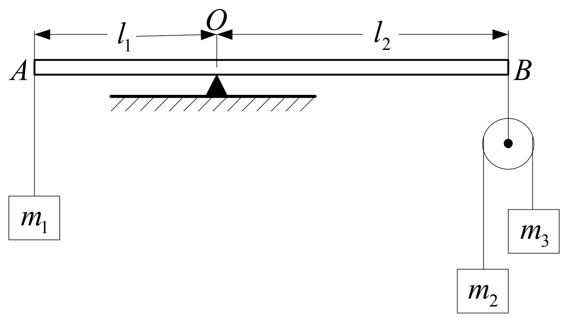
تمرين 2.5

باعتبار قوى الاحتكاك مهملة و كذا كتلة البكرة:

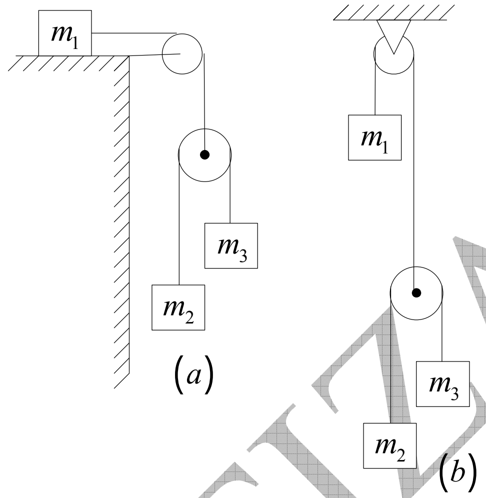
1/ برهن أن القضيب في الشكل أسفله يكون في توازن بشرط أن تتحقق المعادلة التالية:

$$m_1(m_2 + m_3)l_1 = 4m_2m_3l_2$$

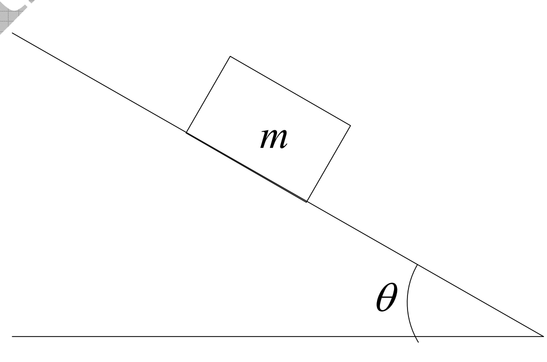
2/ أوجد القوة التي يطبقها السكين على القضيب.



Exercice 5.3	تمرين 3.5
Dans cet exercice on néglige les forces de frottement ainsi que les masses des poulies et celles des fils que nous considérons comme inextensibles. Trouver les accélérations des corps de la figure ci-dessous dans les deux cas (a) et (b).	في هذا التمرين نهمل قوى الاحتكاك و كذا كتل البكرتين و الخيوط التي نعتبرها غير قابلة للتمطيط. أوجد تسارعات أجسام الشكل أسفله في كل من الحالتين (a) و (b).



Exercice 5. 4	تمرين 4.5
La figure ci-dessous représente un corps dont le poids est $5N$ et qui repose sur un plan rugueux incliné de $\theta = 35°$. Le coefficient de frottement statique est 0.80. On prend $g = 10ms^{-2}$. a/ Quel doit être l'angle d'inclinaison pour que le corps décolle ? b/ Quelle est la force de frottement statique maximale? c/ Quelle est la force normale pour $35°$? d/ Quelle est la force de frottement statique pour une inclinaison de $35°$?	يبين الشكل جسما ثقله $5N$ موضوعا على مستوي خشن مائل بـــ $\theta = 35°$. معامل الاحتكاك السكوني هو 0.80. نأخذ $g = 10ms^{-2}$. ا/ ما هي زاوية الميل اللازمة لكي يقلع الجسم ؟ ب/ ما هي قوة الاحتكاك السكوني الأعظمية ؟ ج/ ما هي القوة الناظمية عند ميل $35°$ ؟ د/ ما هي قوة الاحتكاك السكوني عند الميل $35°$؟



Exercice 5.5

La figure ci-dessous représente un corps dont le poids est $8N$ et qui repose sur un plan rugueux incliné de $\theta = 35°$. Le coefficient de frottement cinétique est 0.40. On prend $g = 10ms^{-2}$.

a/ Quel doit être l'angle d'inclinaison pour que le corps glisse avec une vitesse constante ?

b/ Quelle set la force normale pour une inclinaison de $\theta = 35°$?

c/ Quelle est la force de frottement pour $\theta = 35°$?

d/ Quelle est l'accélération pour une inclinaison de $\theta = 35°$?

تمرين 5.5

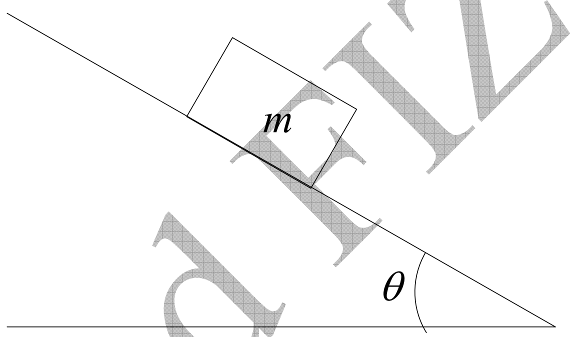
يبين الشكل جسما ثقله $8N$ موضوعا على مستوي خشن مائل ب $\theta = 35°$. معامل الاحتكاك الحركي هو 0.40 . نأخذ $g = 10ms^{-2}$

ا/ ما هي زاوية الميل اللازمة لكي ينتقل الجسم بسرعة ثابتة ؟

ب/ ما هي القوة الناظمية عند ميل $\theta = 35°$ ؟

ج/ ما هي قوة الاحتكاك الحركي عند $\theta = 35°$ ؟

د/ ما هو التسارع عند ميل $\theta = 35°$ ؟



Exercice 5.6

Un corps B de masse $3kg$ est placé sur un autre corps A de masse $5kg$ (figure ci-dessous). On suppose qu'il n'y a pas de frottement entre le corps A et la surface sur laquelle il repose Les coefficients de frottement statique et cinétique entre les deux corps sont respectivement $0,2$ et $0,1$.

a/ Quelle force maximale peut-on appliquer à chaque corps pour faire glisser le système en maintenant ensemble les deux corps ?

b/ Quelle est l'accélération quand cette force maximale est appliquée ?

c/ Quelle est l'accélération du corps B si la force est plus grande que la force maximum ci-dessus et est appliquée au corps A ? et appliquée au corps B ?

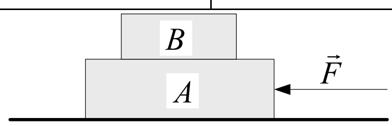
تمرين 6.5

يوضع جسم B كتلته $3kg$ على جسم آخر A كتلته $5kg$ (الشكل في الأسفل). نفترض عدم وجود احتكاك بين الجسم A و السطح الذي يرتكز عليه. معاملا الاحتكاك السكوني و الحركي بين الجسمين هما على التوالي $0,2$ و $0,1$.

ا/ ما هي القوة الأعظمية الممكن تطبيقها على كل جسم حتى تنزلق الجملة مع إبقاء الجسمين معا؟

ب/ ما هو التسارع حين تطبق هذه القوة الأعظمية؟

ج/ ما هو تسارع الجسم B إذا كانت قوة أكبر من القوة الأعظمية المذكورة أعلاه مطبقة على الجسم A ؟ مطبقة على الجسم B ؟



Exercice 5.7

On pose une masse m_2 sur une masse m_1, puis on pose l'ensemble sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontal. Le coefficient de frottement cinétique entre m_1 et m_2 est h_2, et entre m_1 et la surface inclinée il est h_1.

Calculer les accélérations des deux masses.

Application numérique :

$$h_1 = 2h_2 = 0,3 \ , \ m_2 = 8kg \ ,$$
$$m_1 = 5kg \ , \ \alpha = 60° \ , \ g = 9,8ms^{-2}$$

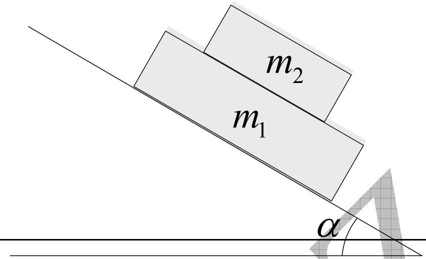
تمرين 7.5

وضعت كتلة m_2 فوق كتلة m_1، ثم وضعت الجملة على مستوى مائل بزاوية α مع الأفق. معامل الإحتكاك الحركي بين m_1 و m_2 هو h_2، و بين m_1 و السطح المائل هو h_1.

أحسب تسارع كل من الكتلتين.

تطبيق عددي:

$$h_1 = 2h_2 = 0,3 \ , \ m_2 = 8kg \ ,$$
$$m_1 = 5kg \ , \ \alpha = 60° \ , \ g = 9,8ms^{-2}$$



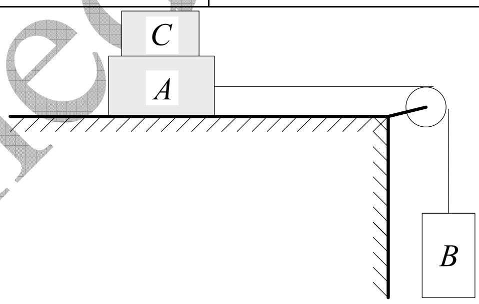
Exercice 5.8

Les masses des corps A et B sur la figure ci-dessous sont respectivement $10kg$ et $5kg$. Le coefficient de frottement de A avec la table est $0,20$. La masse de la poulie est négligeable. Le fil est inextensible et de masse négligeable. Trouver la masse minimale de C qui empêche A de bouger.

Calculer l'accélération du système si on soulève C.

تمرين 8.5

كتلتا الجسمين A و B على الشكل أسفله هما على التوالي $10kg$ و $5kg$. معامل الاحتكاك لـــ A مع الطاولة هو $0,20$. نهمل كتلة البكرة كما نفترض الخيط مهمل الكتلة و عديم الإمتطاط. أوجد الكتلة الأصغرية لـــ C التي تمنع A من التحرك. أحسب تسارع الجملة إذا رفعنا C.



Exercice 5.9

Un point matériel de masse m est lancé avec une vitesse initiale v_0 faisant un angle θ avec l'horizontale. Il est soumis au champ de gravitation terrestre.

I. Le tir a lieu dans le vide:

1. Isoler le point matériel et lui appliquer le principe fondamental de la dynamique. Calculer alors l'accélération $\vec{a}(t)$.

Calculer :

2. la vitesse $\vec{v}(t)$.

3. la position $\overrightarrow{OM}(t)$.

تمرين 9.5

تقذف نقطة مادية كتلتها m بسرعة ابتدائية $\vec{v}_0$ تصنع الزاوية θ مع الأفق و تخضع لحقل الجاذبية الأرضية.

I/ يتم الرمي في الفراغ:

1/ إعزل النقطة المادية و طبق عليها المبدإ الأساسي للتحريك. إحسب حينئذ التسارع $\vec{a}(t)$.

أحسب:

2/ السرعة $\vec{v}(t)$.

3/ الموضع $\overrightarrow{OM}(t)$.

4/ المسافة $OA = x_{max}$.

4. la distance $OA = x_{max}$.

5. l'altitude maximale z_{max} atteinte par ce projectile.

II. Le tir a lieu dans l'air:

Le point matériel est soumis à un frottement visqueux du type $\vec{f} = -k.\vec{v}$:

1. Isoler le point matériel et lui appliquer le principe fondamental de la dynamique.

2. En remplaçant $\vec{a}$ par $\frac{d\vec{v}}{dt}$, montrer que l'on obtient l'équation différentielle suivante:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{k}{m}\vec{v} = \vec{g}.$$

3. En déduire l'expression vectorielle de la vitesse instantanée $\vec{v}(t)$. Montrer que celle-ci tend vers une valeur limite $\vec{v}_L = \vec{g}\frac{m}{k}$.

4. En déduire la position $\overrightarrow{OM}(t)$. Ecrire les expressions des composantes de ce vecteur.

5. Calculer l'instant t_s pour lequel le projectile atteint le sommet S de la trajectoire et en déduire les coordonnées x_s et z_s correspondants.

6/ Démontrer que la trajectoire a une asymptote lorsque $t \to \infty$.

III. Synthèse graphique :

Tracer qualitativement sur un même graphique la trajectoire dans les deux cas suivants:

1. le tir a lieu dans le vide (pas de frottement).

2.le tir a lieu dans l'air (frottement visqueux).

5/ الارتفاع الأعظمي z_{max} الذي تبلغه القذيفة.

II/ الرمي في الهواء:

تخضع النقطة المادية لاحتكاك لزج من النوع $\vec{f} = -k.\vec{v}$.

1/ إعزل النقطة المادية و طبق عليها المبدإ الأساسي للتحريك.

2/ بتعويض $\vec{a}$ بـــ $\frac{d\vec{v}}{dt}$ ، بيّن أننا نحصل على المعادلة التفاضلية التالية: $\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{k}{m}\vec{v} = \vec{g}$

3/ إستنتج العبارة الشعاعية للسرعة اللحظية $\vec{v}(t)$. بيّن أن هذه الأخيرة تؤول إلى قيمة حدية $\vec{v}_L = \vec{g}\frac{m}{k}$.

4/ إستنتج الموضع $\overrightarrow{OM}(t)$. أكتب عبارتي مركبتي هذا الشعاع.

5/ أحسب اللحظة t_s التي تبلغ فيها القذيفة الذروة S لمسارها و استنتج الإحداثيتين المناسبتين x_s و z_s .

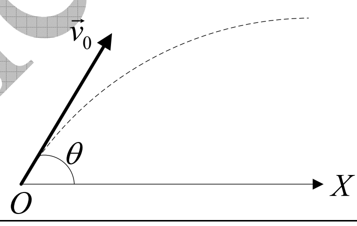
6/ برهن أن المسار يقبل خطا مقاربا عندما $t \to \infty$.

III/ خلاصة بيانية:

أرسم الشكل العام للمسار على نفس البيان في الحالتين:

1/ يتم الرمي في الفراغ(عدم وجود احتكاك).

2/ يتم الرمي في الهواء(وجود احتكاك لزج).



Exercice 5.10

Une demi sphère de rayon $R = 2m$ et de centre O repose sur un plan horizontal. Une particule de masse m, partant du repos du point M_0 situé en haut de la demi-sphère, glisse sous l'action de son poids.

1/ Ecrire l'équation différentielle du mouvement de la particule au cours de son glissement, sachant que le coefficient de glissement sur la surface de la sphère est μ.

2/ **En négligeant les frottements:**

a/ démontrer que la vitesse acquise au point M défini par l'angle $\theta = MOM_0$ est donnée par l'expression $v = \sqrt{2Rg(1-\cos\theta)}$,

تمرين 10.5

توضع كرة نصف قطرها $R = 2m$ و مركزها O على مستوى أفقي. تنزلق جسيمة كتلتها m من السكون تحت تأثير ثقلها من النقطة M_0 الواقعة في أعلى نصف الكرة.

1/ اكتب المعادلة التفاضلية لحركة هذه الجسيمة أثناء انزلاقها علما أن معامل الاحتكاك الإنزلاقي على سطح الكرة هو μ .

2/ **بإهمال الاحتكاك:**

ا/ بين أن السرعة المكتسبة عند النقطة M المعرفة بالزاوية $\theta = \widehat{MOM_0}$ تعطى بالعلاقة

b/ en déduire alors l'angle θ_0 sous lequel la particule quitte la surface de la sphère, discuter le résultat,

c/ calculer la vitesse v_0 correspondante.

3/ Au moment où la particule quitte le point M avec la vitesse v_0 , on demande :

a/ de trouver la vitesse v instantanée en fonction de g, R, v_0, θ_0, t ,

b/ les modules des forces tangentielle et normale.

، $v=\sqrt{2Rg\left(1-\cos\theta\right)}$

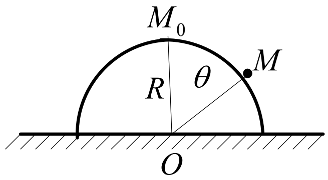
ب/ إستنتج عندئذ مقدار الزاوية θ_0 التي من أجلها تغادر الجسيمة سطح الكرة، ناقش النتيجة،

ج/ أحسب السرعة v_0 الموافقة.

3/ عند مغادرة الجسيمة النقطة M بالسرعة v_0 يطلب:

ا/ إيجاد السرعة v اللحظية للحركة بدلالة g, R, v_0, θ_0, t ،

ب/ شدتي القوة المماسية و القوة الناظمية.



Exercice 5.11

La fusée « Apollo » effectue un voyage de la terre à la lune. La lune est à la distance $3.84\times10^{8}\,m$ de la terre. La masse de la terre est $5.98\times10^{24}\,kg$ tandis que celle de la lune vaut $7.36\times10^{22}\,kg$.

a/ Quelle est l'intensité du champ de pesanteur de la terre lorsque la fusée se trouve à mi-chemin entre la terre et la lune ?

b/ Quelle est l'intensité du champ de pesanteur de la lune lorsque la fusée se trouve à mi-chemin entre la terre et la lune ?

d/ Quelle est l'intensité du champ résultant du champ de pesanteur de la terre et celui de la lune lorsque la fusée se trouve à mi-chemin entre la terre et la lune ?

e/ A quelle distance du centre de la terre le champ résultant des deux champs terrestre et lunaire s'annule-t-il ?

تمرين 11.5

الصاروخ " آبولو" يقوم برحلة من الأرض إلى القمر. يبعد القمر عن الأرض بمسافة $3.84\times10^{8}\,m$. كتلة الأرض $5.98\times10^{24}\,kg$ بينما كتلة القمر $7.36\times10^{22}\,kg$.

ا/ ما هي شدة حقل الجاذبية الأرضية عندما يكون الصاروخ في منتصف الرحلة بين الأرض و القمر ؟

ب/ ما هي شدة حقل الجاذبية القمرية عندما يكون الصاروخ في منتصف الرحلة بين الأرض و القمر ؟

ج/ ما هي شدة الحقل الناتج عن حقل الجاذبية الأرضية و حقل الجاذبية القمرية عندما يكون الصاروخ في منتصف الرحلة بين الأرض و القمر ؟

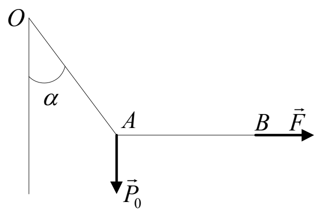
د/ على أي بعد من مركز الأرض ينعدم الحقل الناتج عن جاذبيتي الأرض و القمر ؟

Exercice 5.12

On dispose de deux ressorts linéaires identiques de longueur au repos l . Chacun, soumis à un poids $\vec{P}_0$, prend un allongement l_0, déterminé par leur raideur commune k . On suspend un poids P_0 à l'un des ressorts et on tire horizontalement le poids à l'aide de l'autre ressort que l'on tire avec une force variable $\vec{F}$. Le premier fait alors un angle α avec la verticale. Pour chaque valeur de α correspondant à une force $\vec{F}$, le ressort (1) prend un allongement l_1 et le ressort (2) un allongement l_2. Calculer les allongements l_1 et l_2 en fonction de α et l_0 .

تمرين 12.5

نتوفر على نابضين خطيين متماثلين طول كل منهما l في حالة سكون. حين يخضع كل منهما لثقل $\vec{P}_0$ يأخذ استطالة l_0، محددة بثابت مرونتهما المشتركة k. نعلق ثقلا P_0 إلى أحد النابضين و نسحب أفقيا الثقل بواسطة النابض الآخر الذي نجذبه بقوة متغيرة $\vec{F}$. يصنع الأول زاوية α مع الشاقول. من أجل كل قيمة لـ α مناسبة للقوة $\vec{F}$ ، يستطيل النابض (1) بـ l_1 و النابض (2) الثاني بـ l_2. أحسب الإستطالتين l_1 و l_2 بدلالة α و l_0.



Exercice 5.13

On donne le vecteur position $\vec{}$ d'un corps de masse $6kg : \vec r = \vec i.\left(3t^2-6t\right)+\vec j.\left(-4t^3\right)+\vec k.\left(3t+2\right)(m)$.

Trouver :

a/ la force $\vec F$ agissant sur le corps,

b/ le moment de $\vec F$ par rapport à l'origine,

c/ la quantité de mouvement $\vec p$ du corps et son moment cinétique par rapport à l'origine,

d/ vérifier que $\vec F = \dfrac{d\vec p}{dt}$ et que $\vec \tau = \dfrac{d\vec L}{dt}$.

تمرين 13.5

يعطى شعاع الموضع لجسم كتلته $6kg$:

$\vec r = \vec i.\left(3t^2-6t\right)+\vec j.\left(-4t^3\right)+\vec k.\left(3t+2\right)(m)$

أوجد:

ا/ القوة $\vec F$ المؤثرة على الجسم،

ب/ عزم $\vec F$ بالنسبة للمبدإ،

ج/ كمية الحركة $\vec p$ للجسم و عزمه الحركي بالنسبة للمبدإ،

د/ تأكد أن $\vec F = \dfrac{d\vec p}{dt}$ و أن $\vec \tau = \dfrac{d\vec L}{dt}$.

Exercice 5.14

Un pendule est constitué d'une masse m accrochée au point M à un fil de masse négligeable et de longueur l. Le fil est repéré par rapport à la verticale par l'angle orienté θ. Le mouvement s'effectue sans frottement.

1/ Exprimer dans la base $\left(O,\vec u_r,\vec u_\theta,\vec u_z\right)$ la vitesse de M par rapport au référentiel R.

2/ Etablir l'équation du mouvement en utilisant le théorème du moment cinétique dans chacune des deux bases $\left(O,\vec u_r,\vec u_\theta,\vec u_z\right)$ et $\left(O,\vec u_x,\vec u_y,\vec u_z\right)$. Démontrer qu'elles sont équivalentes. Retrouver cette même équation en appliquant le principe fondamental de la dynamique.

3/ En considérant des oscillations d'amplitude θ_0, trouver l'expression de la tension du fil lors du passage du pendule par sa position d'équilibre. Quelle est donc la condition sur la tension du fil pour que celui-ci ne casse pas ?

تمرين 14.5

يتكون نواس من كتلة m مثبتة في النقطة M لخيط كتلته مهملة و طوله l. موضع الخيط معين بالنسبة للشاقول بالزاوية الموجهة θ. تتم الحركة بدون احتكاك.

1/ عبر في القاعدة $\left(O,\vec u_r,\vec u_\theta,\vec u_z\right)$، عن سرعة M بالنسبة للمرجع R.

2/ ضع معادلة الحركة باستعمال نظرية العزم الحركي في كل من القاعدتين $\left(O,\vec u_r,\vec u_\theta,\vec u_z\right)$ و $\left(O,\vec u_x,\vec u_y,\vec u_z\right)$. برهن أن المعادلتين متكافئتان. أوجد من جديد المعادلة نفسها بتطبيق المبدإ الأساسي للتحريك.

3/ باعتبار الاهتزازات ذات السعة الصغيرة جدا θ_0، جد عبارة توتر الخيط عند مرور النواس من موضع التوازن بدلالة m,g,l و θ_0. ما هو إذن الشرط في توتر الخيط حتى لا ينقطع؟

Exercice 5.15

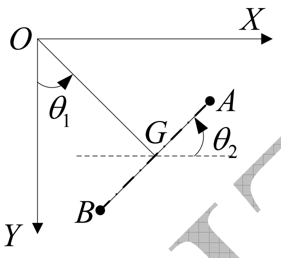
Deux boules identiques, assimilables à deux points matériels de masse m, sont fixées aux deux extrémités d'une barre AB de masse négligeable et de longueur $2d$. Cette barre, astreinte à rester dans le plan (OX,OY), est articulée en G à une tige OG de masse négligeable et de longueur a. Le mouvement est repéré par les angles θ_1 et θ_2 (voir figure).

Calculer directement le moment cinétique $\vec{L}_O$ du système par rapport au point O en fonction de m,a,l,θ_1 et θ_2.

تمرين 15.5

تثبت كرتان متماثلتان، نفترضهما نقطيتين ماديتين ذات كتلة m، في نهاتي قضيب AB كتلته مهملة و طوله $2d$. هذا القضيب المجبر على البقاء في المستوى (OX,OY) ، متمفصل في G مع ساق كتلتها مهملة و طولها a. تعين الحركة بالزاويتين θ_1 و θ_2 (أنظر الشكل).

أحسب مباشرة العزم الحركي $\vec{L}_O$ للجملة بالنسبة للنقطة O بدلالة m,a,l,θ_1 و θ_2.



Exercice 5.16

Un point matériel M, de masse m, lié par un fil inextensible de longueur l à un point fixe A, tourne avec une vitesse angulaire constante ω autour de l'axe AZ.

1. α étant l'angle que forme AM avec la verticale, calculer la tension T du fil puis l'angle α en fonction de m,g,l et ω.

2. Calculer en coordonnées cylindriques d'origine O l'expression du moment cinétique de M par rapport à A.

Vérifier que sa dérivée par rapport au temps est égale au moment par rapport à A de la résultante des forces appliquées à M.

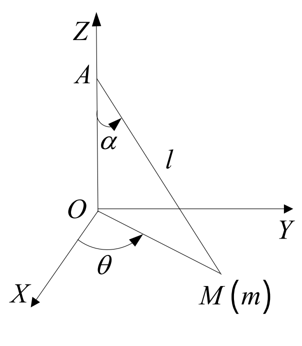
تمرين 16.5

تدور نقطة مادية M كتلتها m، موصلة بخيط غير قابل للتمدد طوله l إلى نقطة ثابتة A، حول المحور AZ بسرعة زاوية ثابتة ω.

1/ إذا كانت α هي الزاوية التي تصنعها AM مع الشاقول، أحسب التوتر T للخيط ثم الزاوية α بدلالة m,g,l و ω.

2/ أحسب بالإحداثيات الأسطوانية ذات المبدإ O عبارة العزم الحركي لـــ M بالنسبة لـــ A.

تأكد أن مشتقته بالنسبة للزمن تساوي عزم محصلة القوى المطبقة على A بالنسبة لـــ M.



Exercice 5.17

Un pendule simple est suspendu au toit du wagon d'un train qui roule en ligne droite sur un terrain plat à une vitesse de $120 km.h^{-1}$. Un passager s'aperçoit que le pendule dévie subitement vers la droite, faisant un angle $\alpha = 10°$ avec la verticale ; il conserve cette position pendant 30 secondes, puis revient à la verticale.

1/ Comment interprétez-vous la déviation du pendule ?
2/ Calculer le rayon de courbure.
3/ De quel angle le train a-t-il tourné ?

On prend $g = 9.8 m.s^{-2}$.

تمرين 17.5:

نواس بسيط معلق إلى سقف عربة قطار يسير على خط مستقيم فوق أرضية مستوية بسرعة $120 km.h^{-1}$. يلاحظ مسافر أن النواس ينحرف فجأة نحو اليمين، صانعا زاوية $\alpha = 10°$ مع الشاقول؛ يحافظ على هدا الوضع مدة 30 ثانية، ثم يعود إلى الشاقول.

1/ كيف تفسر انحراف النواس عن الشاقول؟
2/ أحسب نصف قطر الانحناء.
3/ ما هي الزاوية التي استدار بها القطار؟

نأخذ $g = 9.8 m.s^{-2}$.

Exercice 5.18

Une corde de masse M uniformément répartie sur sa longueur L (figure ci-dessous) peut glisser sans frottement sur la gorge d'une poulie bloquée de très petit rayon. Quand le mouvement commence $BC = b$.

Montrer que lorsque $BC = \frac{2}{3}L$, l'accélération est $a = \frac{g}{3}$ et la vitesse $v = \sqrt{\frac{2g}{L}\left(bL - b^2 - \frac{2}{9}L\right)}$.

Application numérique : $L = 12m$ et $b = 7m$

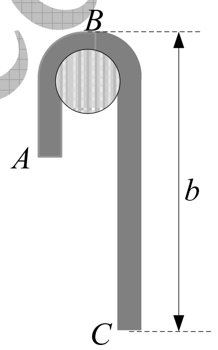
تمرين 18.5

حبل كتلته M موزعة بانتظام على طوله L (الشكل في الأسفل) يمكنه الانزلاق بدون احتكاك على محزّ بكرة غير قابلة للدوران ذات نصف قطر صغير جدا. عندما تبدأ الحركة تكون $BC = b$.

برهن أنه لما $BC = \frac{2}{3}L$ ، فإن التسارع هو $a = \frac{g}{3}$ و عبارة السرعة هي:

$v = \sqrt{\frac{2g}{L}\left(bL - b^2 - \frac{2}{9}L\right)}$.

تطبيق عددي: $L = 12m$ و $b = 7m$.



Exercice 5.19

Un point matériel M de masse m se déplace sans frottement sur la surface intérieure d'un cône de révolution d'axe (Oz), de sommet O et de demi-angle au sommet α.

A l'instant t, M_0 a pour coordonnées cylindriques (r_0, θ_0, z_0). Dans la région considérée, l'accélération de pesanteur $\vec{g}$ sera considérée comme uniforme. Le référentiel $R(0, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ est

تمرين 19.5

تنتقل نقطة مادية M كتلتها m بدون احتكاك على السطح الداخلي لمخروط دوران محوره (Oz) قمته O و نصف زاويته الرأسية α.

في اللحظة t، تكون لـــ M_0 الإحداثيات الأسطوانية (r_0, θ_0, z_0). يعتبر تسارع الجاذبية الأرضية $\vec{g}$ منتظما في المنطقة المعينة. المرجع $R(0, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ غليلي.

1/ برهن أن علو النقطة M، المرموز له بـــ z ، galiléen.

1/ Montrer que la côte du point M , notée z , est donnée par : $z = r\dfrac{z_0}{r_0}$.

2/ Appliquer la relation fondamentale de la dynamique dans R et la projeter sur la base locale des coordonnées cylindriques $\left(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z\right)$. Ecrire le système des trois équations différentielles obtenues.

3/ Déduire la relation $\dot{\theta} = f\left(r_0, v_0, r\right)$ de l'expression de la composante orthoradiale de l'accélération du point M .

4/ Mettre l'équation différentielle d'intégrale $r\left(t\right)$ sous la forme:

$$\ddot{r} + \frac{A\left(r_0, v_0, z_0\right)}{r^3} = B\left(r_0, z_0, g\right)$$

5/ Pour quelle vitesse initiale $v_1 = f\left(z_0, g\right)$ le point M a-t-il un mouvement circulaire uniforme de rayon ${}_0$ sur le cône, autour de l'axe $\left(Oz\right)$?

6/ Multiplier par $2\,\dot{}$ les deux membres de l'équation différentielle de solution $r\left(t\right)$ et l'intégrer une fois par rapport au temps t. Présenter l'équation différentielle obtenue sous la forme : $\dot{r}^2 = f\left(r_0, v_0, z_0, r, g\right)$.

معطى بــ $z = r\dfrac{z_0}{r_0}$.

2/ طبق العلاقة الأساسية للتحريك فيR ثم أسقطها على القاعدة المحلية للإحداثيات الأسطوانية $\left(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z\right)$.أكتب جملة المعادلات التفاضلية الثلاثة المتحصل عليها.

3/ إستنتج العلاقة $\dot{\theta} = f\left(r_0, v_0, r\right)$ لعبارة المركبة العرضية لتسارع النقطة M .

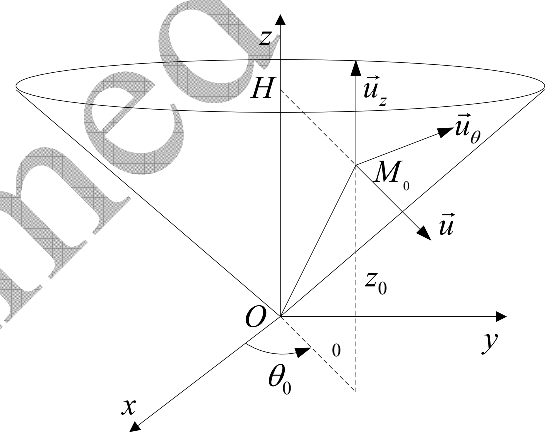
4/ ضع المعادلة التفاضلية لتكامل $r\left(t\right)$ على الشكل:

$$\ddot{r} + \frac{A\left(r_0, v_0, z_0\right)}{r^3} = B\left(r_0, z_0, g\right)$$

5/ من اجل أي قيمة للسرعة الإبتدائية $v_1 = f\left(z_0, g\right)$ يكون للنقطة M حركة دائرية منتظمة نصف قطرها ${}_0$ على المخروط، حول المحور $\left(Oz\right)$ ؟

6/ إضرب في $2\,\dot{}$ طرفي المعادلة التفاضلية ذات الحل $r\left(t\right)$ و كاملها مرة واحدة بالنسبة للزمن t . أكتب المعادلة التفاضلية المحصل عليها على الشكل:

$$\dot{r}^2 = f\left(r_0, v_0, z_0, r, g\right)$$



Exercice 5.20

Une particule de charge q et de masse m, se déplaçant avec une vitesse $\vec{v}$ dans un champ électromagnétique (le champ électrique étant $E\vec{k}$ et le champ magnétique $B\vec{i}$) subit une force de la forme : $\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right)$.

On suppose $\vec{E}$ et $\vec{B}$ constants en module et sens.

Montrer dans ce cas que la particule se déplace dans le plan yOz selon une trajectoire en forme de

تمرين 20.5

تتحرك جسيمة شحنتها q و كتلتها m بسرعة $\vec{v}$ في مجال كهرومغناطيسي(المجال الكهربائي هو $E\vec{k}$ و المجال المغناطيسي هو $B\vec{i}$) فتتأثر بقوة من الشكل:

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right)$$

نفترض $\vec{E}$ و $\vec{B}$ ثابتي الشدة و الاتجاه.

تأكد أن في هذه الحالة تتحرك الجسيمة في

cycloïde d'équations : $y(t)=a(\theta-\sin\theta)$ et $z(t)=a(1-\cos\theta)$. Avec $a=\frac{m}{q}$ et $\theta=\frac{qB}{m}$. La vitesse initiale est nulle.	المستوى yOz وفق مسار دويري معادلتاه: $z(t)=a(1-\cos\theta)$ و $y(t)=a(\theta-\sin\theta)$. مع $a=\frac{m}{q}$ و $\theta=\frac{qB}{m}$. السرعة الابتدائية معدومة.

Corrigés des exercices 1.1 à 1.6: حلول التمارين من 1.1 إلى 1.6

Exercice1.1:

La première erreur se trouve dans la sixième ligne : $\left[V\right] = ML^2T^{-3}I^{-1}$

et l'unité: $V \rightarrow Kg.m^2.s^{-3}.A^{-1} = V$

La deuxième faute est dans la septième ligne: $\left[E\right] = MLT^{-3}I^{-1}$

et l'unité: $E \rightarrow Kg.m.s^{-3}A^{-1} = V/m$

Remarque: dans toutes les solutions des exercices suivantes nous nous basons sur les résultats du tableau de l'exercice1.1 après correction des deux fautes comme indiqué ci-dessus.

Exercice1.2:

Dimension de la constante de raideur:

$$T = kx \Rightarrow k = \frac{T}{x} \quad ; \quad \boxed{\left[k\right] = MT^{-2}}$$

Exercice1.3:

a/ Dimension de la constante de gravitation universelle:

$$G = \frac{Fd^2}{mm'} \; ; \quad \boxed{\left[\mathrm{G}\right] = M^{-1}L^3T^{-2}}$$

b/ Dimension de la permittivité du vide:

$$\varepsilon_0 = \frac{q}{4\pi r^2 E} \; ; \quad \boxed{\left[\varepsilon_0\right] = M^{-1}L^{-3}T^{+4}I^2}$$

c/ Dimension de la permittivité magnétique:

$$\mu_0 = \frac{B.2\pi b}{I} \; ; \quad \boxed{\left[\mu_0\right] = M^{+1}LT^{-2}I^{-2}}$$

e/ Dimension du produit $\left(\mu_0.\varepsilon_0\right)^{-1/2}$:

$$\boxed{\left[\mu_0\varepsilon_0\right]^{-1/2} = TL^{-1} = \left[v\right]}$$

Exercice1.4:

Dimension de la densité de courant:

$$J = \frac{lE}{SR} \qquad \boxed{\mathrm{J} \rightarrow \mathrm{A/m^2} = A.m^{-2}}$$

Exercice1.5:

On remarque que la quantité $\frac{a}{V_0}$ représente une pression, donc

$$\left[\frac{a}{V_0}\right] = \left[p\right] = \frac{\left[F\right]}{\left[S\right]} = ML^{-1}T^{-2}$$

D'où: $\boxed{\left[a\right] = ML^{+2}T^{-2}}$

b ne peut être qu'un volume, donc:

$$\boxed{[b] = [V_0] = L^{+3}}$$

De tout ce qui précède, on en conclu que la quantité RT représente le produit d'une pression par un volume, d'où:

$$[RT] = [P][V] \; ; \quad \boxed{[R] = ML^{+2}T^{-2}K^{-1}}$$

Exercice1.6:

$$[E_c] = M.L^2T^{-2}$$
$$[E] = M.L^2T^{-2}$$
$$[E] = M.L^2T^{-2}$$
$$[W] = M.L^2T^{-2}$$

Exercice 4.22:

1/ $$\boxed{\vec{r} = \frac{1}{2}bt^2.\vec{i} \ + \ ct.\vec{j} + \frac{3}{2}bt^2.\vec{k}}$$

$$\dot{x} = v_x = bt \ , \ \dot{y} = v_y = c \ , \ \dot{z} = v_z = 3bt$$

$$\boxed{\vec{v} = bt.\vec{i} + c.\vec{j} + 3bt.\vec{k}} \ ; \ \boxed{v = \sqrt{10(bt)^2 + c^2}}$$

$$\ddot{x} = a_x = b \ , \ \ddot{y} = a_y = 0 \ , \ \ddot{z} = a_z = 3b$$

$$\boxed{\vec{a} = b.\vec{i} + 3b.\vec{k}} \ ; \ \boxed{a = b\sqrt{10}}$$

2/ $$x = \frac{1}{2}bt^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2x}{b}} \ , \ y = c\sqrt{\frac{2x}{b}}$$

Exercice 4.23:

1/ $$\boxed{\vec{T} = \frac{\vec{v}}{v} = -\frac{3}{5}\sin 2t.\vec{i} + \frac{3}{5}\cos 2t.\vec{j} + \frac{4}{5}.\vec{k}}$$

2/

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -\vec{i}.6\sin 2t + \vec{j}.6\cos 2t + 8.\vec{k} \Rightarrow \vec{v} = -\vec{i}.6\sin 2t + \vec{j}.6\cos 2t + 8.\vec{k}$$

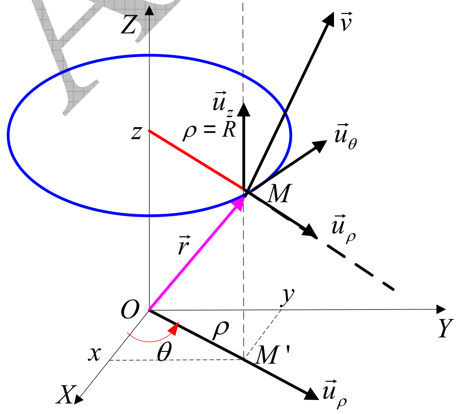
$$\vec{v} = 10\left(-\frac{3}{5}\sin 2t.\vec{i} + \frac{3}{5}\cos 2t.\vec{j} + \frac{4}{5}.\vec{k}\right)$$

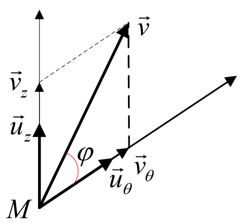
$$\vec{v} = 10.\vec{u}_T = 10\vec{T} \Rightarrow \boxed{\vec{v} = v.\vec{T}}$$

Exercice 4.24:

1/ $$\boxed{\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{u}_\theta + h\dot{\theta}\vec{u}_z}$$

$$\boxed{\vec{a} = -R\dot{\theta}^{2}\cdot\vec{u}_\rho + R\ddot{\theta}^{2}\cdot\vec{u}_\theta + h\ddot{\theta}^{2}\cdot\vec{u}_z}$$





2/

$$\boxed{\tan\left(\vec{v},\vec{u}_\theta\right)=\frac{h}{R}=Cte}$$

3/

$$\boxed{r=\frac{R^2+h^2}{R}}$$

Exercice 4.25:

1/ a/ $x^2+y^2=R^2$ équation d'un cercle de centre $(0,0)$ et de rayon R.

b/ $z=\alpha.t$ le mouvement est rectiligne uniforme verticalement.

c/ La trajectoire du mobile est la composition du mouvement plan et du mouvement vertical, il en résulte un mouvement hélicoïdal.

2/ Dans le système de coordonnées cylindriques:

a/ $\vec{r}=\overrightarrow{OM}=\rho.\vec{u}_\rho+z.\vec{u}_z \Leftrightarrow \vec{r}=\overrightarrow{OM}=R.\vec{u}_\rho+z.\vec{u}_z$

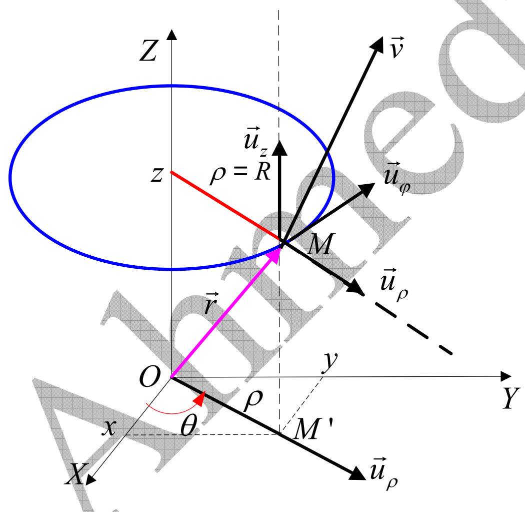
b/

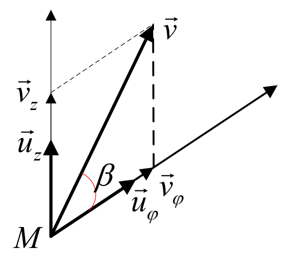
$$\boxed{v=\sqrt{R^2\omega^2+\alpha^2}}$$

$$\boxed{a=R\omega^2}$$

$$\boxed{\tan\beta=\frac{v_z}{v_\varphi}=\frac{\alpha}{R\omega}}$$

$$\boxed{r=\frac{R^2\omega^2+\alpha^2}{R\omega^2}}$$





Exercice 4.26:

1/ **Expression de la dérivée $\dot{\vec{u}}$:**

$$\dot{\vec{u}}_r=\dot{\theta}\cos\theta.\cos\varphi.\vec{i}-\dot{\varphi}.\sin\theta.\sin\varphi.\vec{i}+\dot{\theta}\cos\theta.\sin\varphi.\vec{j}+\dot{\varphi}.\sin\theta.\cos\varphi.\vec{j}-\dot{\theta}\sin\theta.\vec{k}$$

$$\dot{\vec{u}}_r=\dot{\theta}\left[\underbrace{\cos\theta.\cos\varphi.\vec{i}+\cos\theta.\sin\varphi.\vec{j}-\sin\theta.\vec{k}}_{\vec{u}_\theta}\right]-\dot{\varphi}.\sin\theta.\left[\underbrace{-\sin\varphi.\vec{i}+.\cos\varphi.\vec{j}}_{\vec{u}_\varphi}\right]$$

$$\boxed{\dot{\vec{u}}_r=\dot{\theta}.\vec{u}_\theta+\dot{\varphi}.\sin\theta.\vec{u}_\varphi}$$

Expression de la dérivée $\dot{\vec{u}}_\theta$:

$$\dot{\vec{u}}_\theta = \dot\theta\sin\theta.\cos\varphi.\vec{i} - \dot\varphi\cos\theta.\sin\varphi.\vec{i} - \dot\theta\sin\theta.\sin\varphi.\vec{j} + \dot\varphi\cos\theta.\cos\varphi.\vec{j} - \dot\theta\cos\theta.\vec{k}$$

$$\dot{\vec{u}}_\theta = -\dot\theta\left[\underbrace{\sin\theta.\cos\varphi.\vec{i} + \sin\theta.\sin\varphi.\vec{j} + \cos\theta.\vec{k}}_{\vec{u}_r}\right] + \dot\varphi\cos\theta.\left[\underbrace{-\sin\varphi.\vec{i} + \dot\theta + \cos\varphi.\vec{j}}_{\vec{u}_\varphi}\right]$$

$$\boxed{\dot{\vec{u}}_\theta = -\dot\theta.\vec{u}_r + \dot\varphi\cos\theta.\vec{u}_\varphi}$$

Expression de la dérivée $\dot{\vec{u}}_\varphi$:

$$\dot{\vec{u}}_\varphi = -\dot\varphi\cos\varphi.\vec{i} - \dot\varphi\sin\varphi.\vec{j} = -\dot\varphi\left[\cos\varphi.\vec{i} - \varphi\sin\varphi.\vec{j}\right] \to (1)$$

Cette expression n'est pas définitive…

Retournons aux expressions de $\vec{u}$ et $\vec{u}_\theta$. Multiplions la première par $\sin\theta$ et la seconde par $\cos\theta$, nous obtenons:

$$\vec{u}_r.\sin\theta = \sin^2\theta.\cos\varphi.\vec{i} + \sin^2\theta.\sin\varphi.\vec{j} + \sin\theta.\cos\theta.\vec{k} \to (2)$$

$$\vec{u}_\theta.\cos\theta = \cos^2\theta.\cos\varphi.\vec{i} + \cos^2\theta.\sin\varphi.\vec{j} - \cos\theta.\sin\theta.\vec{k} \to (3)$$

Additionnons les deux expressions précédentes membre à membre pour obtenir:

$$\vec{u}_r.\sin\theta + \vec{u}_\theta.\cos\theta = \cos\varphi.\vec{i} + \sin\varphi.\vec{j}$$

Remplaçons maintenant dans l'expression (1) de $\dot{\vec{u}}_\varphi$, elle devient:

$$\dot{\vec{u}}_\varphi = -\dot\varphi\left[\cos\varphi.\vec{i} - \varphi\sin\varphi.\vec{j}\right]$$

2/ $\vec{v} = \dot r.\vec{u}_r + r.\dot\theta.\vec{u}_\theta + r.\dot\varphi.\sin\theta.\vec{u}_\phi$

Dérivons-la par rapport au temps:

$$\vec{a} = \ddot r.\vec{u}_r + \dot r.\dot{\vec{u}}_r + \dot r.\dot\theta.\vec{u}_\theta + r.\ddot\theta.\vec{u}_\theta + r.\dot\theta.\dot{\vec{u}}_\theta + \dot r.\dot\varphi.\sin\theta.\vec{u}_\phi + r.\ddot\varphi.\sin\theta.\vec{u}_\phi + r.\dot\varphi.\dot\theta.\cos\theta.\vec{u}_\phi + r.\dot\varphi.\sin\theta.\dot{\vec{u}}_\phi$$

Remplaçons $\dot{\vec{u}}_r, \dot{\vec{u}}_\varphi, \dot{\vec{u}}_\theta$ par leurs expressions trouvées en 1/:

$$\begin{aligned}\vec{a} = {} & \ddot r.\vec{u}_r + \dot r.\left[\dot\theta.\vec{u}_\theta + \dot\varphi.\sin\theta.\vec{u}_\varphi\right] + \dot r.\dot\theta.\vec{u}_\theta + r.\ddot\theta.\vec{u}_\theta + r.\dot\theta.\left[-\dot\theta.\vec{u}_r + \dot\varphi.\cos\theta.\vec{u}_\varphi\right] + \\ & \dot r.\dot\varphi.\sin\theta.\vec{u}_\phi + r.\ddot\varphi.\sin\theta.\vec{u}_\phi + r.\dot\varphi.\dot\theta.\cos\theta.\vec{u}_\phi + r.\dot\varphi.\sin\theta.\left[-\dot\varphi.\left[\sin\theta.\vec{u}_r + \cos\theta.\vec{u}_\theta\right]\right]\end{aligned}$$

Développons puis ordonnons :

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{a} = {} & \left[\ddot r - r.\dot\theta^2 - r.\dot\varphi^2.\sin^2\theta\right].\vec{u}_r + \dot r.\left[\dot\theta.\vec{u}_\theta + \dot\varphi.\sin\theta.\vec{u}_\varphi\right] + \\ & \left[r.\ddot\varphi.\sin\theta + 2\dot r.\dot\varphi.\sin\theta + 2r.\dot\varphi.\dot\theta.\cos\theta.\vec{u}_\phi\right].\vec{u}_\phi + \\ & \left[r.\ddot\theta + 2\dot r.\dot\theta - r.\dot\varphi^2.\sin\theta\cos\theta\right].\vec{u}_\theta\end{aligned}}$$

Exercice 4.27:

1/ a/

$$\left.\begin{array}{l} r = R = Cte \Rightarrow \dot r = 0 \\ \dot{\vec{u}}_r = \dot\theta.\vec{u}_\theta + \dot\varphi.\sin\theta.\vec{u}_\varphi \\ \theta = Cte \Rightarrow \dot\theta = 0 \\ \varphi = \omega t^2 \Rightarrow \dot\varphi = 2\omega t \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\vec{v} = R\omega t.\vec{u}_\varphi}$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v} = R\omega t.\vec{u}_\varphi \\ \vec{a} = \dot{\vec{v}} = R\omega.\vec{u}_\varphi + R\omega t.\dot{\vec{u}}_\varphi \\ \dot{\vec{u}}_\phi = -\dot{\varphi}.\left[\sin\theta.\vec{u}_r + \cos\theta.\vec{u}_\theta\right]\end{array}\right| \Rightarrow \vec{a} = R\omega.\vec{u}_\varphi + R\omega t.\left(-\dot{\varphi}.\left[\sin\theta.\vec{u}_r + \cos\theta.\vec{u}_\theta\right]\right)$$

$$\vec{a} = -\dot{\varphi}.R\omega t\sin\theta.\vec{u}_r R\omega.\vec{u}_\varphi - \dot{\varphi}.R\omega t\cos\theta.\vec{u}_\theta \Rightarrow \boxed{\vec{a} = -R\omega^2 t^2.\vec{u}_r - \sqrt{3}.R\omega^2 t^2.\vec{u}_\theta + R\omega.\vec{u}_\varphi}$$

b/ $\boxed{v = R\omega t}$ $\boxed{a = R\omega\sqrt{4\omega^2 t^4 + 1}}$

c/ $$\left.\begin{array}{l}a_N^2 = a^2 - a_T^2 \\ a_T = \dfrac{dv}{dt} = R\omega \\ a^2 = R^2\omega^2\left[4\omega^2 t^4 + 1\right]\end{array}\right| \Rightarrow \boxed{a_N = 2R\omega^2 t^2}$$

2/

$$\overrightarrow{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z..\vec{k}$$

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = \frac{1}{2}R.\cos\omega t^2.\vec{i} + \frac{1}{2}R.\cos\omega t^2.\vec{j} + \frac{\sqrt{3}}{2}R..\vec{k}$$

a/

$$\boxed{\vec{v} = \dot{\vec{r}} = -R\omega t\sin\omega t^2.\vec{i} + R\omega t\cos\omega t^2.\vec{j}}$$

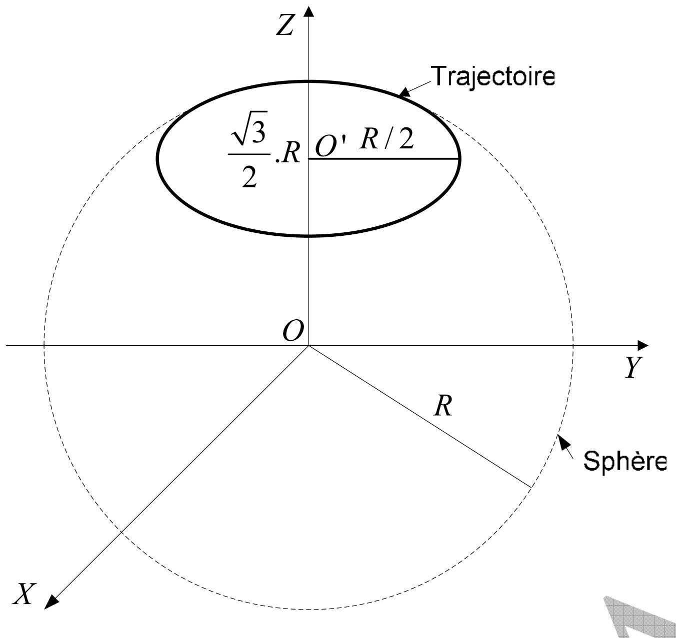
$$\boxed{\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \left[-R\omega\sin\omega t^2 - 2R\omega^2 t^2\cos\omega t^2\right].\vec{i} + \left[R\omega\cos\omega t^2 - 2R\omega^2 t^2\sin\omega t^2\right].\vec{j}}$$

$$\boxed{v = R\omega t} \quad ; \quad \boxed{a = R\omega\sqrt{\left[1 + 4\omega^2 t^4\right]}}$$

3/ $$\left.\begin{array}{l}x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ z = \dfrac{\sqrt{3}}{2}R\end{array}\right| \Rightarrow \boxed{x^2 + y^2 = \frac{1}{4}R^2}$$

Nous en concluons que ce point matériel M décrit un cercle de rayon $\frac{R}{2}$ et de centre $\left(0, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}R\right)$. Quant au vecteur position, il décrit un cône de sommet O et dont le bord est le cercle décrit.

4/ Nature du mouvement du point M :la trajectoire est un cercle, le module de la vitesse est constant et l'accélération tangentielle est constante, donc le mouvement est circulaire uniformément accéléré.


Z
Trajectoire
$\frac{\sqrt{3}}{2}.R$
O'
$R/2$
O
Y
R
Sphère
X

Corrigés des exercices 4.14 à 21.4 — حلول التمارين من 14.4 إلى 21.4

Exercice 4.14:

$$x=\left(t^2+1\right)^2 \quad , \quad y=2\left(t^2+1\right)\Rightarrow \boxed{y=2\sqrt{x}}$$

Exercice 4.15:

1/ $x=4\sin t,\quad y=-3\cos t\Rightarrow \boxed{\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{x^2}{16}=1}$

La trajectoire est une ellipse.

$$2/\quad v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}\Rightarrow v=\sqrt{9\sin^2\frac{\pi}{4}+16\cos^2\frac{\pi}{4}}\Rightarrow \boxed{v=3,53ms^{-1}}$$

Exercice 4.16:

$$1/\quad \boxed{x=\sqrt{\frac{2}{5}}t^2-2\ ,\ y=3\sqrt{\frac{2}{5}}t^2}$$

2/ $a=2ms^{-2}$; $a_T=\dot{v}=2ms^{-2}$; $a_N=\sqrt{a^2-a_T^2}=0$

Exercice 4.17:

1/ $t=\dfrac{1}{2}x\Rightarrow \boxed{y=x^2-2x}$.

$$\left.\begin{array}{l} v_x=2\\ v_y=8t-4\end{array}\right|\Rightarrow v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}\Rightarrow \boxed{v=\sqrt{\left(8t-4\right)^2+4}}\left(ms^{-1}\right)$$

$$3/\quad \left.\begin{array}{l} a_x=\dfrac{dv_x}{dt}=0\\ a_y=\dfrac{dv_y}{dt}=8\end{array}\right|\Rightarrow \boxed{a=8ms^{-2}=C^{te}}$$

$$4/\quad a_T=\frac{dv}{dt}\Rightarrow \boxed{a_T=\frac{8\left(8t-4\right)}{\sqrt{\left(8t-4\right)^2+4}}}\left(ms^{-2}\right)$$

$$a_N^2=a^2-a_T^2\Rightarrow \boxed{a_N=\frac{16}{\sqrt{\left[\left(8t-4\right)^2+4\right]}}}\left(ms^{-2}\right)$$

$$5/\quad a_N=\frac{v^2}{r}\quad ,\quad r=\frac{v^2}{a_N}\Rightarrow \boxed{r=\frac{\sqrt{\left[\left(8t-4\right)^2+4\right]^3}}{16}}\left(m\right)$$

Exercice 4.18:

1/ $\boxed{x^2 + y^2 = 4}$.

La trajectoire tracée par le mobile est un cercle de centre O et de rayon $R = 2$.

2/ $v_x = -\sin\frac{t}{2}$, $v_y = \cos\frac{t}{2}$; $v^2 = v_x^2 + v_y^2 \Leftrightarrow v^2 = 1$, $\boxed{v = \frac{ds}{dt} = 1ms^{-1}}$

3/ $\boxed{s = t}$.

4/ $a_x = -\frac{1}{2}\cos\frac{t}{2}$; $a_y = -\frac{1}{2}\sin\frac{t}{2}$; $\boxed{a^2 = a_x^2 + a_y^2 = 0,25ms^{-2}}$

$\boxed{a_T = \frac{dv}{dt} = 0}$, $a_N = \sqrt{a^2 - a_T^2} \Rightarrow \boxed{a_N = 0,5ms^{-2}}$

5/: $R = \frac{v^2}{a_N} \Rightarrow \boxed{R = 2m}$

6/: $\omega = \int 0,2t.dt \Rightarrow \omega = 0,1t^2 + C$

$\boxed{\omega = 0,1t^2}$.

$v = \omega R = 0,1Rt^2 \Rightarrow \boxed{v = 0,2t^2}$

$10 = 0,2t^2 \Rightarrow \boxed{t = 7,1s}$

$\theta = \frac{0,1}{3}t^3$, $s = R\theta = \frac{0,1}{3}.2.(7,1)^3 \Rightarrow \boxed{s \simeq 23,9m}$

Exercice 4.19:

1/:

$$\vec{r} = r.\vec{u}_r = \frac{r_0}{b}e^{-\frac{t}{b}}.\vec{u}_r \quad ; \quad \theta = \frac{t}{b} \quad ; \quad \dot{\vec{u}}_r = \dot{\theta}.\vec{u}_\theta \quad ; \quad \dot{\vec{u}}_\theta = -\dot{\theta}.\vec{u}_r$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}.\vec{u}_r + r.\dot{\vec{u}}_r \Rightarrow \vec{v} = -\frac{r_0}{b}e^{-\frac{t}{b}}.\vec{u}_r + \frac{r_0}{b}.e^{-\frac{t}{b}}.\vec{u}_\theta \quad ; \quad \boxed{\vec{v} = \frac{r_0}{b}e^{-\frac{t}{b}}\left(-\vec{u}_r + \vec{u}_\theta\right)}$$

2/ $\vec{v}.\vec{u}_\theta = v.u_\theta.\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\vec{v}.\vec{u}_\theta}{v.u_\theta}$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{v}\,\vec{u}_\theta}{v\,u_\theta} = \frac{\frac{r_0}{b}e^{-\frac{t}{b}}\left(-\vec{u}_r + \vec{u}_\theta\right)\vec{u}_\theta}{\sqrt{2}\frac{r_0}{b}e^{-\frac{t}{b}}u_\theta} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \boxed{\left(\vec{v},\vec{u}_\theta\right) = \alpha = \frac{\pi}{4}rad}$$

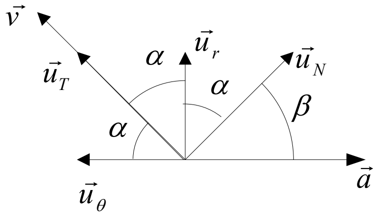
$-\vec{u}_r\,\vec{u}_\theta = 0$; $\vec{u}_\theta\,\vec{u}_\theta = 1$, $u_\theta = 1$

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{u}_r + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\vec{u}_\theta \Rightarrow \vec{a} = \left(\frac{r_0}{b^2}e^{-\frac{t}{b}} - \frac{r_0}{b^2}e^{-\frac{t}{b}}\right)\vec{u}_r + \left(-2\frac{r_0}{b^2}e^{-\frac{t}{b}}\right)\vec{u}_\theta$$

3/

$$\boxed{\vec{a} = \left(-2\frac{r_0}{b^2}e^{-\frac{t}{b}}\right)\vec{u}_\theta} \qquad \boxed{a = 2\frac{r_0}{b^2}e^{-\frac{t}{b}}}$$

4/ Nous avons vu à la question (3) que $\vec{a}$ et $\vec{u}_\theta$ ont la même direction, soit $\left(\vec{a} = -a\vec{u}_\theta\right)$; de même $\vec{v} = v.\vec{u}_T$. Sur cette base, on peut établir la figure suivante :



$$\vec{u}_T \perp \vec{u}_N \Rightarrow 3\alpha + \beta = \pi \Rightarrow 3\frac{\pi}{4} + \beta = \pi \Rightarrow \boxed{\beta = \frac{\pi}{4} rad}$$

$$\boxed{\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{v}\right) = 3\frac{\pi}{4} rad}$$

5/

$$\boxed{R = \frac{v^2}{a_N}}$$

$$\left.\begin{array}{l} a_N = \sqrt{a^2 - a_T^2} \\ v^2 = 2\dfrac{r_0}{b}e^{-2\frac{t}{b}} \\ a_N^2 = 2\dfrac{r_0^2}{b^4}e^{-2\frac{t}{b}} \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{R = \sqrt{2}r_0 e^{-\frac{t}{b}} = \sqrt{2}.r}$$

Exercice 4.20:

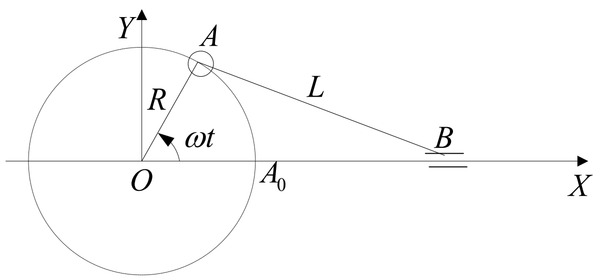
1/

$$AB^2 = OB^2 + OA^2 - 2.OA.OB.\cos\omega t$$

$$L^2 = x^2 + R^2 - 2Rx\cos\omega t \Leftrightarrow L^2 = x^2 + R^2\left(\sin^2\omega t + \cos^2\omega t\right) - 2Rx\cos\omega t$$

$$L^2 = \left(x - R\cos\omega t\right)^2 + R^2\sin^2\omega t \Rightarrow \boxed{x = R\cos\omega t + \left(L^2 - R^2\sin^2\omega t\right)^{1/2}}$$

Nous pouvons nous assurer que $x = R + L$ quand $\omega.t = 0$.

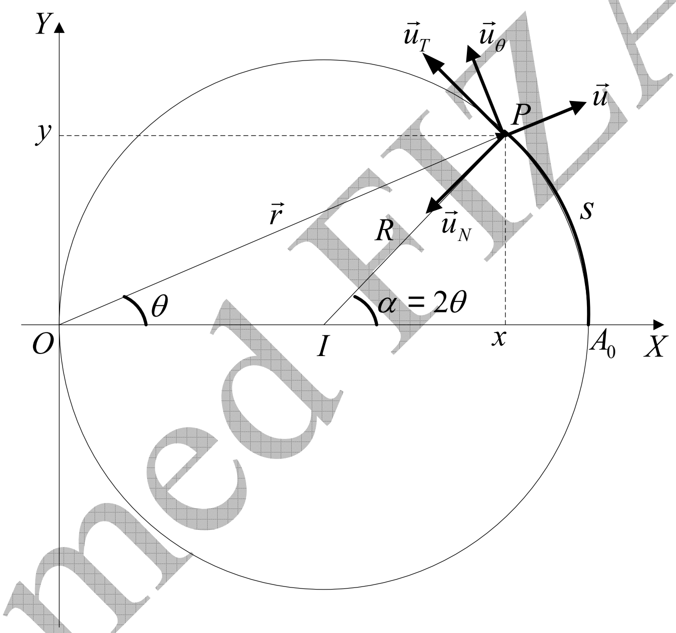


2/

$$\sin\omega t + \frac{R\sin^2\omega t}{2\left(L^2 - R^2\sin^2\omega t\right)^{1/2}} = 0 \Rightarrow \omega.t = k.\pi \Rightarrow \boxed{t = k\frac{\pi}{\omega}}$$

Exercice 4.21:

1/ En regardant la figure on voit bien que : $\overrightarrow{IP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OI} \Rightarrow R^2 = R^2 + r^2 - 2R.r.\cos\theta$



Donc l'équation polaire du cercle est: $r^2 = 2R.r.\cos\theta \Rightarrow \boxed{r = 2R.\cos\theta}$

L'équation cartésienne du cercle est:

Graphiquement: $x^2 + y^2 = r^2 \quad avec \quad r^2 = 2rR\cos\theta$

Or: $\cos\theta = \dfrac{x}{r} \Rightarrow r = \dfrac{x}{\cos\theta}$

D'où: $x^2 + y^2 = 2R\dfrac{x}{\cos\theta}\cos\theta \Rightarrow \boxed{x^2 + y^2 - 2R.x = 0}$

2/ La base polaire du point P est représentée sur la figure. Pour calculer les composantes polaires de la vitesse et de l'accélération nous partons de l'expression du vecteur position: $\vec{r} = \overrightarrow{OP} = r.\vec{u}$.

La première dérivée par rapport au temps nous donne l'expression du vecteur vitesse, soit:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v}=\dfrac{d\vec{r}}{dt}=\dot{r}.\vec{u}_r+r\dot{\theta}\vec{u}_\theta\\ r=2R\cos\theta\\ \dot{r}=-2R\dot{\theta}\sin\theta\end{array}\right|\Rightarrow \vec{v}=-2R\dot{\theta}.\sin\theta.\vec{u}_r+2R\dot{\theta}.\cos\theta.\vec{u}_\theta$$

$$\boxed{\vec{v}=2R\dot{\theta}\left(-\sin\theta.\vec{u}_r+\cos\theta.\vec{u}_\theta\right)}\rightarrow(1)$$

La dérivée seconde par rapport au temps nous conduit à l'expression du vecteur accélération:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{a}=\dfrac{d\vec{v}}{dt}=\left(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2\right).\vec{u}_r+\left(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta}\right)\vec{u}_\theta\\ r=2R\cos\theta\\ \dot{r}=-2R\dot{\theta}\sin\theta\\ \ddot{r}=-2R\left(\ddot{\theta}\sin\theta+\dot{\theta}^2\cos\theta\right)\end{array}\right|\Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{a}=-2R\left(2\dot{\theta}^2.\cos\theta+\ddot{\theta}.\sin\theta\right)\vec{u}_r+2R\left(\ddot{\theta}.\cos-2\dot{\theta}^2\sin\theta\right)\vec{u}_\theta}\rightarrow(2)$$

3/

- Expression de s en fonction de θ:

Nous rappelons ici une propriété géométrique du cercle:

Dans un cercle, les angles qui interceptent le même arc de cercle, celui dont le sommet est au centre du cercle vaut le double de l'angle ayant son sommet sur la circonférence de ce même cercle. Voir figure ci-dessus. Donc:

$$\boxed{\alpha=2\theta}\quad\boxed{s=\overset{\frown}{AP}=R.\alpha=2R\theta}$$

- La base locale $\left(\vec{u}_T,\vec{u}_N\right)$ de P est représentée sur la figure.
- Les composantes du vecteur vitesse sont : $\boxed{\vec{v}=v.\vec{u}_T=2R\dot{\theta}.\vec{u}_T}\rightarrow(3)$

- Pour le vecteur accélération:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{a}=\vec{a}_N+\vec{a}_T\\ \vec{a}_N=\dfrac{v^2}{R}\vec{u}_N=4R\dot{\theta}^2\vec{u}_N\\ \vec{a}_T=\dfrac{dv}{dt}\vec{u}_T=2R\ddot{\theta}\vec{u}_T\end{array}\right|\Rightarrow\boxed{\vec{a}=\underbrace{4R\dot{\theta}^2}_{a_N}\vec{u}_N+\underbrace{2R\ddot{\theta}\vec{u}_T}_{a_T}}\rightarrow(4)$$

Pour retrouver les expressions de la vitesse et de l'accélération dans la base polaire il suffit d'exprimer les vecteurs unitaires de la base locale en coordonnées polaires:
De la figure on en déduit:

$$\vec{u}_N = -\cos\theta.\vec{u}_r - \sin\theta.\vec{u}_\theta$$
$$\vec{u}_T = -\sin\theta.\vec{u}_r + \cos\theta.\vec{u}_\theta$$

En remplaçant dans les équations (3) et (4) nous obtenons les équations (1) et (2) obtenues précédemment:

$$\boxed{\vec{v} = v.\vec{u}_T = 2R\dot{\theta}.\left(-\sin\theta.\vec{u}_r + \cos\theta.\vec{u}_\theta\right)} = (1)$$

Organisons cette dernière équation:

$$\boxed{\vec{a} = -2R\left(2.\dot{\theta}^2.\cos\theta + \ddot{\theta}\sin\theta\right).\vec{u}_r + 2R\left(\ddot{\theta}\cos\theta - 2\dot{\theta}^2\sin\theta\right).\vec{u}_\theta} = (2)$$

4/ A présent la vitesse angulaire est constante.

- L'angle θ balayé par le point P durant t est : $\alpha = 2\theta = \omega t \Rightarrow \boxed{\theta = \dfrac{\omega t}{2}}$
- L'expression de   est: $\boxed{r = 2R\cos\dfrac{\omega}{2}t}$
- Expressions de la vitesse et de l'accélération : On sait depuis le début que $\boxed{\dot{\theta} = \dfrac{\omega}{2}}$.

Nous remplaçons dans les expressions $(1),(2),(3)$ et (4), θ et $\dot{\theta}$ par leurs valeurs respectives:

- En coordonnées polaires : on remplace dans (1) et (2) :

$$\boxed{\vec{v} = R\omega\left(-\sin\frac{\omega t}{2}.\vec{u}_r + \cos\frac{\omega t}{2}.\vec{u}_\theta\right)}$$

$$\boxed{\vec{a} = \left(-2R\omega^2.\cos\frac{\omega}{2}t\right).\vec{u}_r - \left(R\omega^2.\sin\frac{\omega}{2}t\right)\vec{u}_\theta}$$

- En coordonnées propres (Frenet): On remplace dans (3) et (4) :

$$\boxed{\vec{a} = R\omega^2.\vec{u}_N} \quad \boxed{\vec{v} = R\omega.\vec{u}_T}$$

EXERCICES
تمـاريـن

Exercice 4.14	التمرين 14.4
Une particule se déplace dans un plan XY selon la loi: $v_x = 4t^3 + 4t$ et $v_y = 4t$. Si le mobile se trouvait au point $(1,2)$ à l'instant $t=0$, trouver l'équation de la trajectoire en coordonnées cartésiennes.	تنتقل جسيمة في المستوى XY وفق القانون $v_x = 4t^3 + 4t$ و $v_y = 4t$. إذا وجد المتحرّك في النقطة $(1,2)$ في اللحظة $t=0$، أوجد معادلة المسار بالإحداثيات الكارتيزية.

Exercice 4.15	التمرين 15.4
Une particule se déplace dans un plan XY selon la loi: $a_x = -4\sin t$ et $a_y = 3\cos t$. Sachant que pour $t=0$ on ait $x=0$ ، $y=-3$ ، $v_x = 4$ و $v_y = 0$ ، trouver : 1/ l'équation de la trajectoire, quelle est son allure ? 2/ la valeur de la vitesse à l'instant $t = \frac{\pi}{4}s$.	تنتقل جسيمة في المستوى XY وفق القانون $a_x = -4\sin t$ و $a_y = 3\cos t$. علما أنه من أجل $t=0$ لدينا $x=0$ ، $y=-3$ ، $v_x = 4$ و $v_y = 0$ ، أوجد: 1/ معادلة المسار، ما شكله؟ 2/ قيمة السرعة في اللحظة $t = \frac{\pi}{4}s$.

Exercice 4.16	التمرين 16.4
Soit le mouvement défini par sa trajectoire $y = 3(x+2)$ et son équation horaire $s(t) = 2t^2$. Sachant que $x=-2$ et $y=0$ quand $s(0)=0$ et que s croit avec la croissance de y : 1/ trouver les équations paramétriques $x(t)$ et $y(t)$ du mouvement, 2/ déterminer l'accélération normale et l'accélération tangentielle du mouvement.	لتكن الحركة المعرّفة بمسارها $y = 3(x+2)$ و بمعادلتها الزمنية $s(t) = 2t^2$. علما أن $x=-2$ و $y=0$ لمّا $s(0)=0$، كما أن s يتزايد مع تزايد y: 1/ أوجد المعادلتين الوسيطيتين $x(t)$ و $y(t)$ للحركة، 2/ حدد التسارع الناظمي و التسارع المماسي للحركة.

Exercice 4.17	التمرين 17.4
On donne les équations paramétriques de la trajectoire plane d'un point mobile par rapport à un référentiel : $x = 2t$ et $y = 4t^2 - 4t$ 1/ Déterminer l'équation de la trajectoire, Quelle est son allure ? 2/Calculer la vitesse du mobile, 3/Montrer que son accélération est constante, 4/Déterminer les composantes normale et tangentielle de l'accélération dans un repère de Frenet. 5/En déduire le rayon de courbure.	تعطى المعادلتان الوسيطيتان للمسار المستوي لمتحرّك بالنسبة لمرجع: $x = 2t$ و $y = 4t^2 - 4t$. 1/ حدّد معادلة المسار، ما شكله؟ 2/أحسب سرعة المتحرّك، 3/ برهن أن تسارعه ثابت، 4/ حدّد المركبتين الناظمية و المماسية للتسارع في معلم فرينت، 5/ إستنتج نصف قطر الانحناء.

Exercice 4.18	التمرين 18.4
Le plan est rapporté à un repère orthonormé xOy d'origine O et de base ($\vec{i}, \vec{j}$). Les coordonnées	ينسب المستوى إلى معلم متعامد و متجانس xOy مبدأه

x et y d'un point M mobile dans le plan $(O,\vec{i},\vec{j})$ varient avec le temps suivant la loi:

$$x = 2\cos\frac{t}{2} \text{ et } y = 2\sin\frac{t}{2}.$$

1/ Déterminer la nature de la trajectoire,

2/ Déterminer les composantes du vecteur vitesse $\vec{v}$,

3/ Déterminer l'expression de la vitesse $\frac{ds}{dt}$, ainsi que celle de l'abscisse curviligne s du point M à l'instant t, en prenant comme condition initiale $s = 0$ quand $t = 0$,

4/ déterminer les composantes normale et tangentielle de l'accélération dans un repère de Frenet,

5/ en déduire le rayon de courbure de la trajectoire.

6/ La trajectoire reste la même, mais maintenant le point M subit une accélération angulaire $\frac{d^2\theta}{dt^2} = \ddot{\theta} = 0,2t$. A quelle date le point M atteindra-t-il une vitesse de $10ms^{-1}$, sachant qu'il est parti du repos. Quelle distance a-t-il alors parcourue ?

O و قاعدته $(\vec{i},\vec{j})$. تتغير الإحداثيتان x و y لنقطة M متحركة في المستوى $(O,\vec{i},\vec{j})$ مع الزمن حسب القانون : $x = 2\cos\frac{t}{2}$ و $y = 2\sin\frac{t}{2}$.

1/ حدد طبيعة المسار.

2/ حدد مركبتي شعاع السرعة $\vec{v}$ ،

3/ حدد عبارة السرعة $\frac{ds}{dt}$ و كذا عبارة الإحداثية s المنحنية لنقطة M في اللحظة t ، بأخذ الشرط الإبتدائي $s = 0$ لما $t = 0$ ،

4/ حدد المركبتين المماسية و الناظمية للتسارع في معلم فرينت،

5/ إستنتج نصف قطر الانحناء.

6/ المسار باق على حاله في حين تتأثر النقطة M بتسارع زاوي $\frac{d^2\theta}{dt^2} = \ddot{\theta} = 0,2t$. في أي لحظة تبلغ النقطة M سرعة $10ms^{-1}$ ، علما أنها انطلقت من السكون. ما هي المسافة التي قطعتها؟

Exercice 4.19

Une particule soumise à des champs électriques et magnétiques complexes est en mouvement dans un référentiel galiléen. Les équations horaires sont, en coordonnées polaires : $r = r_0 e^{-\frac{t}{b}}$ et $\theta = \frac{t}{b}$, ${}_0$et b sont des constantes positives.

1/ Calculer le vecteur vitesse de la particule,

2/ Montrer que l'angle $(\vec{v},\vec{u}_\theta)$ est constant. Que vaut cet angle ?

3/ Calculer le vecteur accélération de la particule,

4/ Montrer que l'angle $(\vec{a},\vec{u}_N)$ est constant. Que vaut cet angle ? (On se servira de la question2),

5/ Calculer le rayon de courbure de la trajectoire.

التمرين 19.4

تنتقل جسيمة خاضعة لحقول كهربائية و مغناطيسية معقدة في مرجع غليلي. المعادلتان الزمنيتان بالإحداثيات القطبية هما $r = r_0 e^{-\frac{t}{b}}$ و $\theta = \frac{t}{b}$ ، ${}_0$ و b ثابتان موجبان.

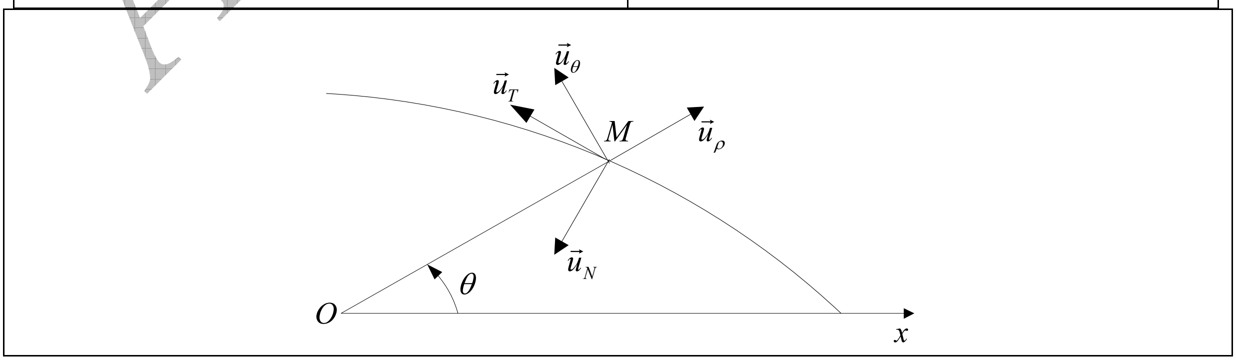
1/ أحسب شعاع السرعة للحركة،

2/ بيّن أن الزاوية $(\vec{v},\vec{u}_\theta)$ ثابتة. كم تساوي هذه الزاوية؟

3/ أحسب شعاع التسارع للحركة،

4/ بيّن أن الزاوية $(\vec{a},\vec{u}_N)$ ثابتة. كم تساوي هذه الزاوية؟(نستعين بالسؤال2)،

5/ أحسب نصف قطر انحناء المسار.



Exercice 4.20

Un bras OA tournant avec une vitesse ω autour d'un axe O, est articulé en A avec une tige AB. La tige AB est solidaire d'un curseur B pouvant coulisser le long de l'axe Ox. le bras et la tige peuvent se croiser lorsque la tige passe par derrière l'articulation en O. Sachant que $AB = L$ et $OA = R$:

1/ trouver l'équation horaire du mouvement de B, sachant que B passe en A_0 au temps $t = 0$,

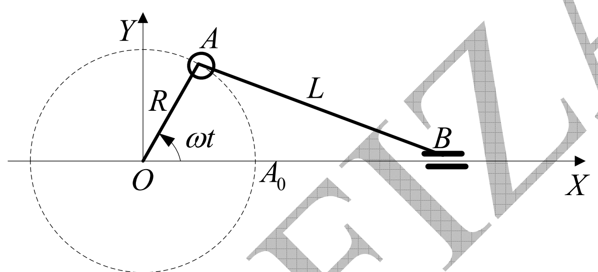
2/ à quel instants la vitesse s'annule-t-elle ?

التمرين 20.4

مدور OA يدور بسرعة زاوية ثابتة ω حول محور ، Oو مشترك بواسطة مفصل عند A مع قضيب AB . القضيب AB متمفصل عند B بواسطة زلاقة قابلة للانزلاق على طول المحور Ox. يمكن للقضيبين OA و AB أن يتقاطعا في حين تمرّ الزلاقة خلف المفصل O. إذا كان $AB = L$ و $OA = R$:

1/ أوجد المعادلة الزمنية لحركة B علما أن A يمرّ في A_0 عند الزمن $t = 0$،

2/ في أي لحظات تنعدم السرعة؟



Exercice 4.21

Dans le plan (XOY) d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, un point P se déplace sur un cercle de rayon R et de centre $I(R,0,0)$.

A l'instant $t = 0$, P se trouve en $A(2R,0,0)$ et possède la vitesse positive $\vec{v}_0\,(0, v_0, 0)$.

On désigne par et θ les coordonnées polaires de P.

1/ Former l'équation polaire du cercle, en déduire son équation cartésienne.

2/ Représenter sur la figure la base polaire $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ de P. Calculer en fonction de θ et de ses dérivées successives par rapport au temps les composantes polaires des vecteurs vitesse $\vec{v}$ et $\vec{a}$ de P dans le repère $(O,\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{k})$.

3/ Soit s l'abscisse curviligne de P (l'origine est en A).

- Donner l'expression de s en fonction de θ.
- Représenter sur la figure la base intrinsèque $(\vec{u}_T, \vec{u}_N)$ de P.
- Calculer en fonction de θ et de ses dérivées successives par rapport au temps les composantes

التمرين 21.4

في مستو (XOY) لمعلم $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، تنتقل نقطة P على دائرة نصف قطرها R و مركزها $I(R,0,0)$.

في اللحظة $t = 0$، توجد P في $A(2R,0,0)$ و تكسب السرعة الموجبة $\vec{v}_0\,(0, v_0, 0)$.

نرمز إلى الإحداثيات القطبية لـP بـ و θ.

1/ كوّن المعادلة القطبية للدائرة، إستنتج معادلتها الديكارتية.

2/ مثّل على الشكل القاعدة القطبية $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ لـP. أحسب بدلالة θ و مشتقاتها المتتالية بالنسبة للزمن إحداثيات شعاعي السرعة $\vec{v}$ و التسارع $\vec{a}$ لـ P في المعلم $(O,\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{k})$.

3/ لتكن الفاصلة المنحنية s لـP (المبدأ في A):

- إعط عبارة s بدلالة θ،
- مثّل على الشكل القاعدة الذاتية $(\vec{u}_T, \vec{u}_N)$ لـ P.
- أحسب بدلالة θ و مشتقاتها المتتالية بالنسبة

de $\vec{v}$ et $\vec{a}$ dans cette base. • . Calculer les composantes polaires de $\vec{u}_T$ et de $\vec{u}_N$ .Retrouver dans ces conditions les composantes polaires de $\vec{v}_0$ et $\vec{a}$. 4/ On désigne par ω la vitesse angulaire de P, dont on suppose dans tout ce qui suit qu'elle est constante. • . Donner en fonction de t, les expressions de θ puis de . • En déduire les expressions de $\vec{v}$ et $\vec{a}$ en fonction de t dans les bases polaire et de Frenet.	للزمن إحداثيات $\vec{v}_0$ و $\vec{a}$ في هذا المعلم . • أحسب المركبتين القطبيتين $\vec{u}_T$ و $\vec{u}_N$. • أوجد من جديد في هذه الشروط المركبتين القطبيتين لـ $\vec{v}$ و $\vec{a}$. 4/ نرمز بـ ω للسرعة الزاوية لـ P ، والتي نعتبرها في كل ما يتبع ثابتة. • إعط بدلالة t ، عبارتي θ ثم . • إستنتج عبارتي $\vec{v}$ و $\vec{a}$ بدلالة الزمن في القاعدة القطبية و قاعدة فرينت.

EXERCICES
تـمـاريـن

Exercice 4.14 Une particule se déplace dans un plan XY selon la loi: $v_x = 4t^3 + 4t$ et $v_y = 4t$. Si le mobile se trouvait au point $(1,2)$ à l'instant $t = 0$, trouver l'équation de la trajectoire en coordonnées cartésiennes.	**التمرين 14.4** تنتقل جسيمة في المستوى XY وفق القانون $v_x = 4t^3 + 4t$ و $v_y = 4t$. إذا وجد المتحرّك في النقطة $(1,2)$ في اللحظة $t = 0$ ، أوجد معادلة المسار بالإحداثيات الكارتيزية.

Exercice 4.15 Une particule se déplace dans un plan XY selon la loi: $a_x = -4\sin t$ et $a_y = 3\cos t$. Sachant que pour $t = 0$ on ait $x = 0$ ، $y = -3$ ، $v_x = 4$ و $v_y = 0$ ، trouver : 1/ l'équation de la trajectoire, quelle est son allure ? 2/ la valeur de la vitesse à l'instant $t = \frac{\pi}{4} s$.	**التمرين 15.4** تنتقل جسيمة في المستوى XY وفق القانون $a_x = -4\sin t$ و $a_y = 3\cos t$. علما أنه من أجل $t = 0$ لدينا $x = 0$ ، $y = -3$ ، $v_x = 4$ و $v_y = 0$ ، أوجد: 1/ معادلة المسار، ما شكله؟ 2/ قيمة السرعة في اللحظة $t = \frac{\pi}{4} s$.

Exercice 4.16 Soit le mouvement défini par sa trajectoire $y = 3(x+2)$ et son équation horaire $s(t) = 2t^2$. Sachant que $x = -2$ et $y = 0$ quand $s(0) = 0$ et que s croit avec la croissance de y : 1/ trouver les équations paramétriques $x(t)$ et $y(t)$ du mouvement, 2/ déterminer l'accélération normale et l'accélération tangentielle du mouvement.	**التمرين 16.4** لتكن الحركة المعرّفة بمسارها $y = 3(x+2)$ و بمعادلتها الزمنية $s(t) = 2t^2$. علما أن $x = -2$ و $y = 0$ لمّا $s(0) = 0$ ، كما أن s يتزايد مع تزايد y : 1/ أوجد المعادلتين الوسيطيتين $x(t)$ و $y(t)$ للحركة، 2/ حدد التسارع الناظمي و التسارع المماسي للحركة.

Exercice 4.17 On donne les équations paramétriques de la trajectoire plane d'un point mobile par rapport à un référentiel : $x = 2t$ et $y = 4t^2 - 4t$ 1/ Déterminer l'équation de la trajectoire, Quelle est son allure ? 2/Calculer la vitesse du mobile, 3/Montrer que son accélération est constante, 4/Déterminer les composantes normale et tangentielle de l'accélération dans un repère de Frenet. 5/En déduire le rayon de courbure.	**التمرين 17.4** تعطى المعادلتان الوسيطيتان للمسار المستوي لمتحرّك بالنسبة لمرجع: $x = 2t$ و $y = 4t^2 - 4t$. 1/ حدّد معادلة المسار، ما شكله؟ 2/أحسب سرعة المتحرّك، 3/ برهن أن تسارعه ثابت، 4/ حدّد المركبتين الناظمية و المماسية للتسارع في معلم فرينت، 5/ إستنتج نصف قطر الانحناء.

Exercice 4.18 Le plan est rapporté à un repère orthonormé xOy d'origine O et de base ($\vec{i}, \vec{j}$). Les coordonnées	**التمرين 18.4** ينسب المستوى إلى معلم متعامد و متجانس xOy مبدأه

x et y d'un point M mobile dans le plan ($O,\vec{i},\vec{j}$) varient avec le temps suivant la loi:

$$x = 2\cos\frac{t}{2} \text{ et } y = 2\sin\frac{t}{2}.$$

1/ Déterminer la nature de la trajectoire,

2/ Déterminer les composantes du vecteur vitesse $\vec{v}$,

3/ Déterminer l'expression de la vitesse $\frac{ds}{dt}$, ainsi que celle de l'abscisse curviligne s du point M à l'instant t, en prenant comme condition initiale $s = 0$ quand $t = 0$,

4/ déterminer les composantes normale et tangentielle de l'accélération dans un repère de Frenet,

5/ en déduire le rayon de courbure de la trajectoire.

6/ La trajectoire reste la même, mais maintenant le point M subit une accélération angulaire $\frac{d^2\theta}{dt^2} = \ddot{\theta} = 0,2t$. A quelle date le point M atteindra-t-il une vitesse de $10ms^{-1}$, sachant qu'il est parti du repos. Quelle distance a-t-il alors parcourue ?

O و قاعدته $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$. تتغير الإحداثيتان x و y لنقطة M متحركة في المستوى $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ مع الزمن حسب القانون : $x = 2\cos\frac{t}{2}$ و $y = 2\sin\frac{t}{2}$.

1/ حدد طبيعة المسار.

2/ حدد مركبتي شعاع السرعة $\vec{v}$ ،

3/ حدد عبارة السرعة $\frac{ds}{dt}$ و كذا عبارة الإحداثية s المنحنية لنقطة M في اللحظة t ، بأخذ الشرط الإبتدائي $s = 0$ لما $t = 0$ ،

4/ حدد المركبتين المماسية و الناظمية للتسارع في معلم فرينت،

5/ إستنتج نصف قطر الانحناء.

6/ المسار باق على حاله في حين تتأثر النقطة M بتسارع زاوي $\frac{d^2\theta}{dt^2} = \ddot{\theta} = 0,2t$. في أي لحظة تبلغ النقطة M سرعة $10ms^{-1}$ ، علما أنها انطلقت من السكون. ما هي المسافة التي قطعتها؟

Exercice 4.19

Une particule soumise à des champs électriques et magnétiques complexes est en mouvement dans un référentiel galiléen. Les équations horaires sont, en coordonnées polaires : $r = r_0 e^{-\frac{t}{b}}$ et $\theta = \frac{t}{b}$, $_0$ et b sont des constantes positives.

1/ Calculer le vecteur vitesse de la particule,

2/ Montrer que l'angle $\left(\vec{v},\vec{u}_\theta\right)$ est constant. Que vaut cet angle ?

3/ Calculer le vecteur accélération de la particule,

4/ Montrer que l'angle $\left(\vec{a},\vec{u}_N\right)$ est constant. Que vaut cet angle ? (On se servira de la question2),

5/ Calculer le rayon de courbure de la trajectoire.

التمرين 19.4

تنتقل جسيمة خاضعة لحقول كهربائية و مغناطيسية معقدة في مرجع غليلي. المعادلتان الزمنيتان بالإحداثيات القطبية هما $r = r_0 e^{-\frac{t}{b}}$ و $\theta = \frac{t}{b}$ ، $_0$ و b ثابتان موجبان.

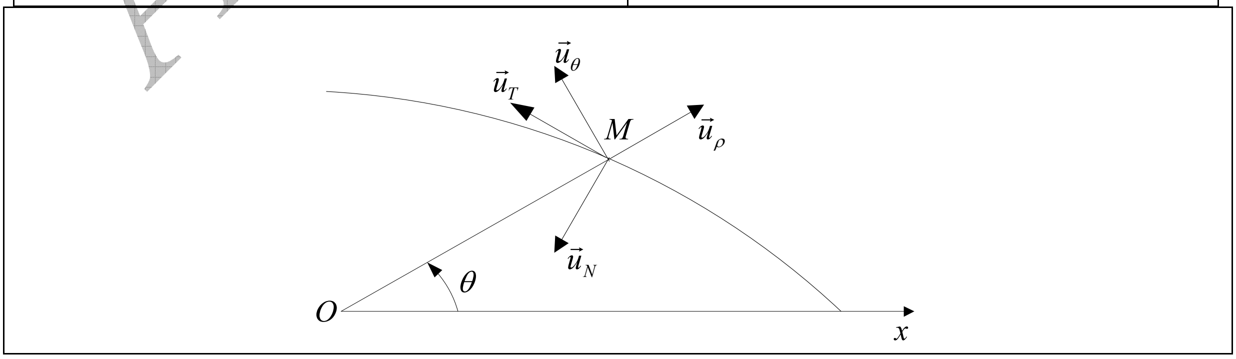
1/ أحسب شعاع السرعة للحركة،

2/ بيّن أن الزاوية $\left(\vec{v},\vec{u}_\theta\right)$ ثابتة. كم تساوي هذه الزاوية؟

3/ أحسب شعاع التسارع للحركة،

4/ بيّن أن الزاوية $\left(\vec{a},\vec{u}_N\right)$ ثابتة. كم تساوي هذه الزاوية؟(نستعين بالسؤال2)،

5/ أحسب نصف قطر انحناء المسار.



Exercice 4.20

Un bras OA tournant avec une vitesse ω autour d'un axe O, est articulé en A avec une tige AB. La tige AB est solidaire d'un curseur B pouvant coulisser le long de l'axe Ox. le bras et la tige peuvent se croiser lorsque la tige passe par derrière l'articulation en O. Sachant que $AB = L$ et $OA = R$:

1/ trouver l'équation horaire du mouvement de B, sachant que B passe en A_0 au temps $t = 0$,

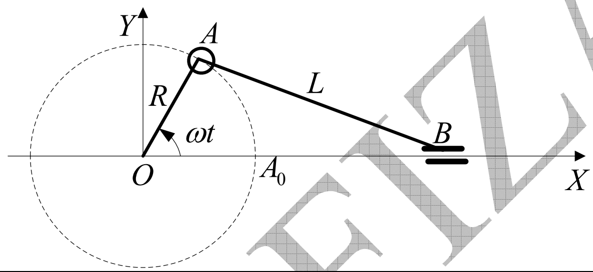
2/ à quel instants la vitesse s'annule-t-elle ?

التمرين 20.4

مدور OA يدور بسرعة زاوية ثابتة ω حول محور ، O و مشترك بواسطة مفصل عند A مع قضيب AB. القضيب AB متمفصل عند B بواسطة زلاقة قابلة للانزلاق على طول المحور Ox. يمكن للقضيبين OA و AB أن يتقاطعا في حين تمرّ الزلاقة خلف المفصل O. إذا كان $AB = L$ و $OA = R$:

1/ أوجد المعادلة الزمنية لحركة B علما أن A يمرّ في A_0 عند الزمن $t = 0$،

2/ في أي لحظات تنعدم السرعة؟



Exercice 4.21

Dans le plan (XOY) d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, un point P se déplace sur un cercle de rayon R et de centre $I(R, 0, 0)$.

A l'instant $t = 0$, P se trouve en $A(2R, 0, 0)$ et possède la vitesse positive $\vec{v}_0\,(0, v_0, 0)$.

On désigne par et θ les coordonnées polaires de P.

1/ Former l'équation polaire du cercle, en déduire son équation cartésienne.

2/ Représenter sur la figure la base polaire $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ de P. Calculer en fonction de θ et de ses dérivées successives par rapport au temps les composantes polaires des vecteurs vitesse $\vec{v}$ et $\vec{a}$ de P dans le repère $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k})$.

3/ Soit s l'abscisse curviligne de P (l'origine est en A).

- Donner l'expression de s en fonction de θ.
- Représenter sur la figure la base intrinsèque $(\vec{u}_T, \vec{u}_N)$ de P.
- Calculer en fonction de θ et de ses dérivées successives par rapport au temps les composantes

التمرين 21.4

في مستو (XOY) لمعلم $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$، تنتقل نقطة P على دائرة نصف قطرها R و مركزها $I(R, 0, 0)$.

في اللحظة $t = 0$، توجد P في $A(2R, 0, 0)$ و تكسب السرعة الموجبة $\vec{v}_0\,(0, v_0, 0)$.

نرمز إلى الإحداثيات القطبية لـ P بـ و θ.

1/ كوّن المعادلة القطبية للدائرة، إستنتج معادلتها الديكارتية.

2/ مثّل على الشكل القاعدة القطبية $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ لـ P. أحسب بدلالة θ و مشتقاتها المتتالية بالنسبة للزمن إحداثيات شعاعي السرعة $\vec{v}$ و التسارع $\vec{a}$ لـ P في المعلم $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k})$.

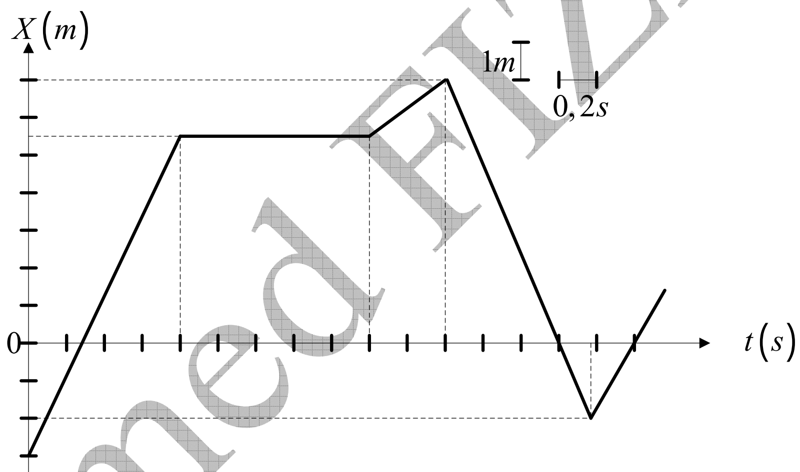
3/ لتكن الفاصلة المنحنية s لـ P (المبدأ في A):

- إعط عبارة s بدلالة θ،
- مثّل على الشكل القاعدة الذاتية $(\vec{u}_T, \vec{u}_N)$ لـ P.
- أحسب بدلالة θ و مشتقاتها المتتالية بالنسبة

de $\vec{v}$ et $\vec{a}$ dans cette base. • . Calculer les composantes polaires de $\vec{u}_T$ et de $\vec{u}_N$ .Retrouver dans ces conditions les composantes polaires de $\vec{v}_0$ et $\vec{a}$. 4/ On désigne par ω la vitesse angulaire de P, dont on suppose dans tout ce qui suit qu'elle est constante. • . Donner en fonction de t , les expressions de θ puis de . • En déduire les expressions de $\vec{v}$ et $\vec{a}$ en fonction de t dans les bases polaire et de Frenet.	للزمن إحداثيات $\vec{v}_0$ و $\vec{a}$ في هذا المعلم . • أحسب المركبتين القطبيتين $\vec{u}_T$ و $\vec{u}_N$. • أوجد من جديد في هذه الشروط المركبتين القطبيتين لـ $\vec{v}$ و $\vec{a}$. 4/ نرمز بـ ω للسرعة الزاوية لـ P ، والتي نعتبرها في كل ما يتبع ثابتة. • إعط بدلالة t ، عبارتي θ ثم . • إستنتج عباراتي $\vec{v}$ و $\vec{a}$ بدلالة الزمن في القاعدة القطبية و قاعدة فرينت.

EXERCICES
تـمـاريـن

Exercice 4.8 La position d'un mobile en fonction du temps est indiquée sur la figure ci-dessous. Indiquer : 1/ en quel endroit le mouvement se fait dans la direction des X positifs ou négatifs ? 2/ à quel instant le mouvement est retardé ou accéléré ? 3/ quand le corps passe par l'origine ? 4/ quand la vitesse est nulle ? 5/ faire un graphique de la vitesse et de l'accélération en fonction du temps, 6/ estimer d'après le graphique, la vitesse moyenne pour les intervalles de temps : $1s \leq t \leq 1{,}8s \;,\; 1s \leq t \leq 2{,}2s \;,\; 1s \leq t \leq 3s$	**التمرين 8.4** موضع المتحرك بدلالة الزمن مبيّن على الشكل أسفله. بيّن: 1/ في أي موضع تتمّ الحركة في جهة الفواصل X الموجبة أو السالبة؟ 2/ في أي لحظة تكون الحركة متسارعة أو متباطئة؟ 3/متى يمرّ الجسم من مبدإ الفواصل؟ 4/ متى تنعدم السرعة؟ 5/ قم برسم بياني للسرعة و التسارع بدلالة الزمن، 6/ انطلاقا من الرسم البياني، قيّم السرعة المتوسطة من أجل الفواصل الزمنية: $1s \leq t \leq 3s \;,\; 1s \leq t \leq 2{,}2s \;,\; 1s \leq t \leq 1{,}8s$



Exercice 4.9 Un point matériel se déplace sur l'axe $x'ox$ de façon qu'entre le carré v^2 de sa vitesse et son abscisse x, il existe la relation $v^2 = Ax + B$,où A et B sont des constantes. 1/ Calculer l'accélération du mobile. Que peut-on dire du mouvement ? 2/ Connaissant la nature du mouvement, trouver par une autre méthode les valeurs de A et B en fonction des caractéristiques du mouvement.	**التمرين 9.4** تنتقل نقطة مادية على المحور $x'ox$ بحيث توجد ، بين مربع سرعتها v^2 و فاصلتها x، العلاقة $v^2 = Ax + B$ ، A و B ثابتان. 1/ أحسب تسارع المتحرّك. ماذا يمكن أن نقول عن الحركة؟ 2/ بمعرفة طبيعة الحركة، أوجد بطريقة أخرى قيمتي A و B بدلالة مميزات الحركة.

Exercice 4.10 Une pierre est lancée verticalement vers le haut depuis le toit d'un immeuble avec une vitesse de $29,4ms^{-1}$.On laisse tomber une seconde pierre $4s$ après avoir jeté la première. Démontrer que la première pierre dépassera la seconde $4s$ exactement après que l'on ait lâché la seconde. $g = 9,8ms^{-2}$.	**تمرين 10.4** تقذف حجارة شاقوليا إلى الأعلى بسرعة $29,4ms^{-1}$ انطلاقا من سطح عمارة. بعد $4s$ من قذف الحجارة الأولى نترك حجارة ثانية تسقط. برهن أن الحجارة الأولى تتجاوز الحجارة الثانية $4s$ بالضبط بعد تركنا للثانية. $g = 9,8ms^{-2}$

Exercice 4.11 Un homme au sommet d'un immeuble lance une balle verticalement vers le haut avec une vitesse $12m.s^{-1}$. La balle atteint le sol $4,25s$ plus tard. 1/ Quelle est la hauteur maximale atteinte par la balle ? 2/ Quelle est la hauteur de l'immeuble ? 3/ Avec quelle vitesse la balle atteint-elle le sol ? $g = 9,8ms^{-2}$	**تمرين 11.4** يقذف رجل من قمّة عمارة شاقوليا إلى الأعلى كرة بسرعة $12m.s^{-1}$. تصل الكرة إلى الأرض بعد $4,25s$ من قذفها. 1/ ما هو الارتفاع الأعظمي الذي تبلغه الكرة؟ 2/ كم هو علو العمارة؟ 3/ ما هي السرعة التي تصطدم بها الكرة مع الأرض؟ $g = 9,8ms^{-2}$

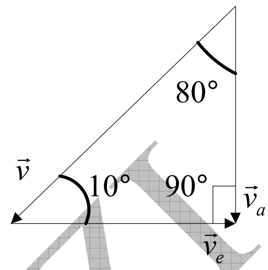
Exercice 4.12 L'unité de longueur est le centimètre, l'unité de temps la seconde. Une automobile se déplace en mouvement rectiligne. Son accélération est donnée par $a = -\frac{\pi^2}{4}x$, tel que, à la date $t = 1s$, on ait l'abscisse $x = 4cm$ et la vitesse $v = 2\pi cm.s^{-1}$. 1/ déterminer la nature du mouvement, écrire son équation horaire. 2/ calculer toutes les constantes qui caractérisent le mouvement, 3/ montrer que x peut s'écrire sous la forme : $x = X_m\cos(\omega t + \varphi)$.	**التمرين 12.4** وحدة الطول هي السنتيمتر، وحدة الزمن هي الثانية. تنتقل سيارة بحركة مستقيمة. يعطى تسارعها بـ $a = -\frac{\pi^2}{4}x$ ، بحيث أن في اللحظة $t = 1s$ تكون الفاصلة $x = 4cm$ و السرعة $v = 2\pi cm.s^{-1}$. 1/ حدّد طبيعة الحركة، أكتب معادلتها الزمنية. 2/ أحسب كل الثوابت التي تميّز الحركة، 3/ بيّن أنه يمكن كتابة x على الشكل: $x = X_m\cos(\omega t + \varphi)$.

Exercice 4.13 Un corps est animé d'un mouvement rectiligne dont l'accélération est donnée par $a = 32 - 4v$ (avec comme conditions initiales $x = 0$ et $v = 4$ pour $t = 0$). Trouver v en fonction de t, x en fonction de t et x en fonction de v.	**تمرين 13.4** ينتقل جسم بحركة مستقيمة بتسارع $a = 32 - 4v$ (بشروط ابتدائية $x = 0$ و $v = 4$ من أجل $t = 0$). أوجد v بدلالة t ، x بدلالة t و x بدلالة v .

Exercice 4.28:

Soit $\vec{v}_a$ la vitesse de précipitation de la pluie par rapport au sol, $\vec{v}$ la vitesse de la pluie par rapport au véhicule et $\vec{v}_e$ la vitesse de la voiture par rapport au sol:

Représentons les trois vecteurs puis appliquons la loi des sinus:
La vitesse de précipitation de la pluie par rapport à la voiture au repos est:



$$\frac{v_a}{\sin 10°} = \frac{v_r}{\sin 90°} \Rightarrow \boxed{v_a = \frac{\sin 10°}{\sin 90°} v_r} \;;\; \boxed{v_a = 17,4 km.h^{-1}}$$

La vitesse de précipitation de la pluie par rapport à la voiture en mouvement est:

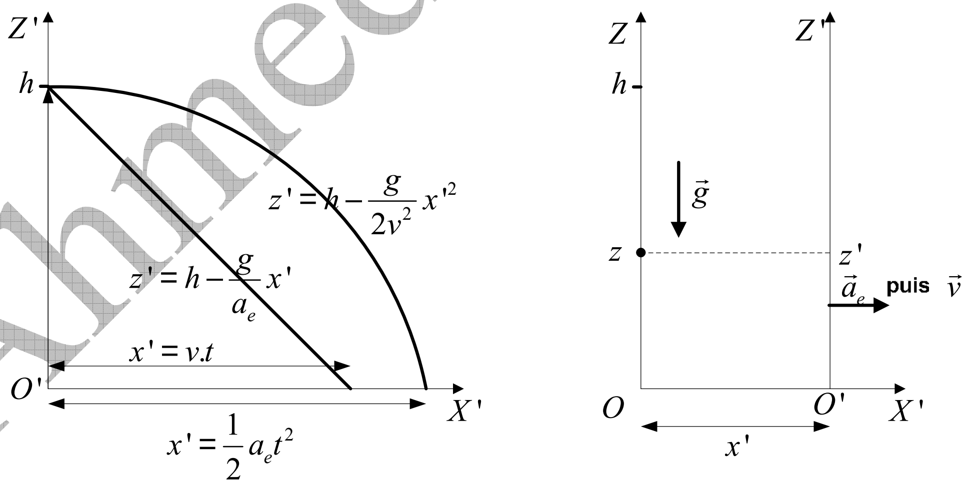
$$\frac{v_r}{\sin 90°} = \frac{v_e}{\sin 80°} \Rightarrow \boxed{v_r = \frac{\sin 90°}{\sin 80°} v_e} \;;\; \boxed{v_r = 117 km.h^{-1}}$$

Exercice 4.29:

1/ $$t = \frac{x'}{v} \Rightarrow \boxed{z = z' = -\frac{g}{2v^2} x'^2 + h}$$ **: la trajectoire est une parabole.**

2/ $$t^2 = \frac{2x'}{a_e} \Rightarrow \boxed{z = z' = -\frac{g}{a_e} x' + h}$$ **: la trajectoire est une droite.**

Nous avons représenté sur la figure ci-dessous la trajectoire pour chaque cas.



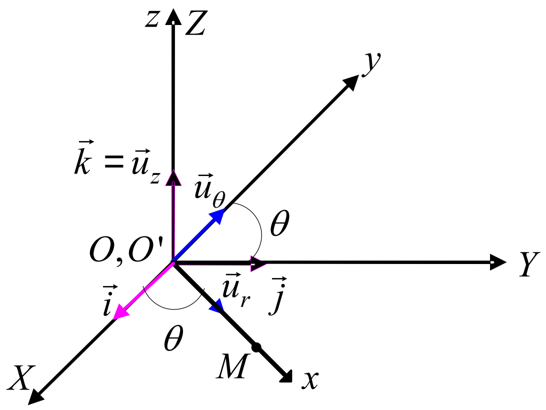
Exercice 4.30:

Nous étudions le mouvement de M dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$. Les vecteurs unitaires sont indépendantes du temps. Voir figure.

1/ $\boxed{\overrightarrow{OM} = \vec{r} = \vec{r}\,' = r.\vec{u}_r}$, $\boxed{\vec{v}_r = \dot{r}.\vec{u}_r}$; $\boxed{\vec{a}_r = \ddot{r}.\vec{u}_r}$.

2/

$$\vec{v}_e = \vec{\omega} \wedge \overline{O'M} = \begin{vmatrix} \vec{u}_r & -\vec{u}_\theta & \vec{u}_z \\ 0 & 0 & \dot{\theta} \\ r & 0 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_e = r\dot{\theta}.\vec{u}_\theta}$$



$$\left.\begin{array}{l} \vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \overline{O'M} = \dot{\theta}.\vec{u}_z \wedge r\dot{\theta}.\vec{u}_\theta = -r\dot{\theta}^2\vec{u}_r \\ \dfrac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overline{O'M} = \begin{vmatrix} \vec{u}_r & -\vec{u}_\theta & \vec{u}_z \\ 0 & 0 & \ddot{\theta} \\ r & 0 & 0 \end{vmatrix} = r\ddot{\theta}\vec{u}_\theta \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\vec{a}_e = -r\dot{\theta}^2\vec{u}_r + r\ddot{\theta}\vec{u}_\theta}$$

3/ $$\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r = 2.\begin{vmatrix} \vec{u}_r & -\vec{u}_\theta & \vec{u}_z \\ 0 & 0 & \dot{\theta} \\ \dot{r} & 0 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \boxed{\vec{a}_c = 2\dot{r}\dot{\theta}\vec{u}_\theta}$$

4/ $$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r \Rightarrow \boxed{\vec{v}_a = \dot{r}.\vec{u}_r + r\dot{\theta}.\vec{u}_\theta}$$

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c \Rightarrow \boxed{\vec{a}_a = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right).\vec{u}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right).\vec{u}_\theta}$$

❖ **Remarque: Si on veut faire les calculs par rapport au repère mobile, on utilise la base** $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$**, en remplaçant** $\vec{u}$ **et** $\vec{u}_\theta$ **dans les résultats des vitesses et des accélérations auxquelles nous sommes parvenues par** $\vec{u}_r = \vec{i}.\cos\theta + \vec{j}.\sin\theta$ **et** $\vec{u}_\theta = -\vec{i}.\sin\theta + \vec{j}.\cos\theta$**.**

Exercice 4.31:

1/ $$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{OM} = \vec{r} = r.\vec{i}' \\ \vec{i}' = \vec{u}_r \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\vec{r} = \left(\frac{1}{2}at^2 + r_0\right).\vec{u}_r}$$

$$\boxed{\vec{v}_r = \dot{\vec{r}} = at.\vec{u}_r}$$

$$\vec{v}_e = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M} = \begin{vmatrix} \vec{u}_r & -\vec{u}_\theta & \vec{u}_z \\ 0 & 0 & \omega \\ \frac{1}{2}at^2 + r_0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow \boxed{\vec{v}_e = \left(\frac{1}{2}at^2 + r_0\right)\omega.\vec{u}_\theta}$$

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r \Rightarrow \boxed{\vec{v}_a = at.\vec{u}_r + \left(\frac{1}{2}at^2 + r_0\right)\omega.\vec{u}_\theta} \;;\; \boxed{v_a = \sqrt{(at)^2 + \left(\frac{1}{2}at^2 + r_0\right)^2 .\omega^2}}$$

$$\boxed{tg\alpha = \frac{v_\theta}{v_r} = \frac{\left(\frac{1}{2}at^2 + r_0\right)\omega}{at}}$$

2/

$$\theta = \omega t \;,\; \boxed{\theta = 1{,}884 rad = 108°} \;;\; r = \frac{1}{2}at^2 + r_0 \;,\; \boxed{r = 0{,}1m}$$

$$x = r.\cos\theta \;,\; \boxed{x = -0{,}031m} \;;\; y = r.\sin\theta \;,\; \boxed{y = 0{,}095m}$$

$$v_r = at \;,\; \boxed{v_r = 0{,}06 m.s^{-1}} \;;\; v_e = \left(\frac{1}{2}at^2 + r_0\right)\omega \;,\; \boxed{v_e = 0{,}0628 m.s^{-1}}$$

3/

$$\vec{a}_r = a.\vec{i}' = a.\vec{u}_r \Rightarrow \boxed{\vec{a}_r = a.\vec{u}_r}$$

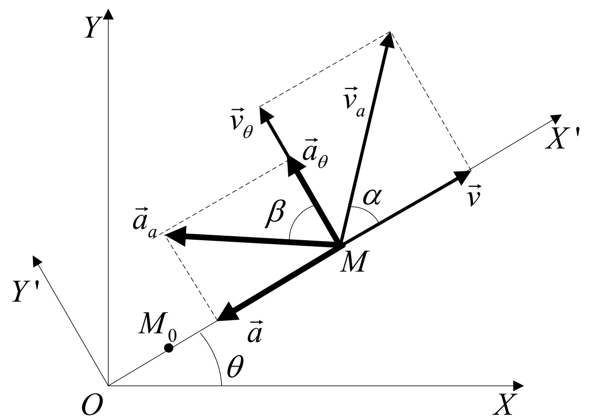
$$v_a = \sqrt{v_r^2 + v_e^2} \;,\; \boxed{v_a = 0{,}087 m.s^{-1}}$$

$$tg\alpha = \frac{v_\theta}{v_r} = 1{,}047 \Rightarrow \boxed{\alpha = 46{,}3°}$$

$$\vec{a}_e = \underbrace{\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}}_{0} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} + \underbrace{\frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M}}_{0} \quad , \quad \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}$$

$$\vec{a}_e = \vec{\omega} \wedge \left(\underbrace{\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}}_{\vec{v}_e}\right)$$

$$\vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M} = \omega.\vec{u}_z \wedge \left(\frac{1}{2}at^2 + r_0\right)\omega.\vec{u}_\theta = -r\omega^2\vec{u}_r \Rightarrow \boxed{\vec{a}_e = -\left(\underbrace{\frac{1}{2}at^2 + r_0}_{r}\right)\omega^2.\vec{u}_\theta}$$



3/ $$\vec{a}_c = 2\vec{\omega}\wedge\vec{v}_r = 2.\begin{vmatrix} \vec{u}_r & -\vec{u}_\theta & \vec{u}_z \\ 0 & 0 & \omega \\ at & 0 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \boxed{\vec{a}_c = 2at\omega.\vec{u}_\theta}$$

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c \Rightarrow \boxed{\vec{a}_a = \left[a - \left(\frac{1}{2}at^2 + r_0\right)\omega^2\right].\vec{u}_r + \left(2at.\omega\right).\vec{u}_\theta}$$

$$\boxed{a_a = \sqrt{\left[a - \left(\frac{1}{2}at^2 + r_0\right)\omega^2\right]^2 + \left(2at.\omega\right)^2}}$$

$$\boxed{\tan\beta = \frac{a_r}{a_\theta} = \frac{a - \left(\frac{1}{2}at^2 + r_0\right)\omega}{2at}}$$

Exercice 4.32:

1/ $$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}$$

$$\boxed{x = R\left(\omega.t - .\sin\omega.t\right)} \; ; \; \boxed{y = R\left(1 - .\cos\omega t\right)}$$

$$\overrightarrow{OM}\begin{cases} x = R\left(\omega t - \sin\omega t\right) \\ y = R\left(1 - \cos\omega t\right) \\ z = 0 \end{cases}$$

La représentation graphique de ces équations paramétriques nous conduit à une **cycloïde** **(منحنى دويري)**.

2/ $$\boxed{\vec{v}_a = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = R\omega\left(1 - \cos\omega t\right).\vec{i} + R\omega\sin\omega t.\vec{j}} \; ; \; \boxed{v_a = 2R\omega\left|\sin\frac{\omega t}{2}\right|}$$

$$\boxed{\alpha = \left|\frac{\pi}{2} - \frac{\omega t}{2}\right|}$$

La vitesse relative est la vitesse absolue du point M par rapport au référentiel mobile $X'AY'$, donc:

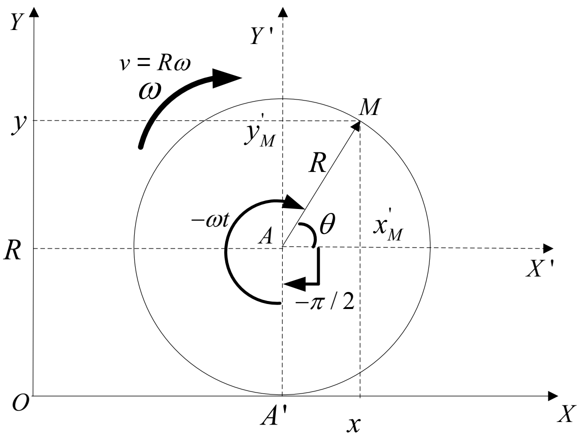
$$\vec{v}_r = \frac{d\overrightarrow{AM}}{dt}$$

$$\boxed{\dot{x}'_M = -R.\omega s\cos t} \quad ; \quad \boxed{\dot{y}'_M = -R.\omega.\sin\omega t}$$

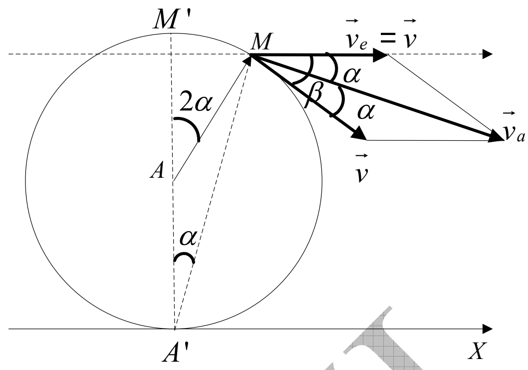
$$\boxed{\vec{v}_r = -R.\omega s\cos t.\vec{i} - R.\omega.\sin\omega t.\vec{j}} \; \boxed{v_r = R\omega}$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v}_r.\vec{i} = v_r.i.\cos\beta \\ v_r.\cos\beta = \dot{x}'_M = -\underbrace{R\omega}_{v_r}\cos\omega t \\ -\cos\omega t = \cos\left(\pi - \omega t\right) \end{array}\right| \Rightarrow \cos\beta = -\cos\omega t \quad ; \quad \boxed{\beta = \pi - \omega t = 2\alpha}$$

3/ la vitesse d'entraînement $\vec{v}_e$. Regardons la figure (b) ci-dessous (en se basant sur quelques propriétés géométriques). Dans un cercle l'angle au centre est égale au double de l'angle dont le sommet est situé sur la circonférence du cercle (l'angle M'AM=2α et l'angle M'A'M=α). $\vec{v}$ est tangent à la trajectoire circulaire au point M .



(a)



(b)

De la figure (b), il vient:

$$\vec{v}_e = \vec{v}_a - \vec{v}_r \Rightarrow v_e = \sqrt{v_a^2 + v_r^2 - 2v_a.v_r.\cos\alpha}$$

$$\left.\begin{array}{l} v_e = \sqrt{4R^2\omega^2\sin^2\dfrac{\omega t}{2} + R^2\omega^2 - 2R\omega.2R\omega\sin\dfrac{\omega t}{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\omega t}{2}\right)} \\ \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\omega t}{2}\right) = \sin\dfrac{\omega t}{2} \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{v_e = R\omega = v}$$

La vitesse d'entraînement est égale à la vitesse de translation du centre du cercle par rapport au repère fixe XOY, ce qui est tout à fait logique. $\vec{v}_e$ est parallèle à l'axe OX.

Exercice 4.33:

1/ $$\boxed{\vec{r} = r_0\left(\cos\omega t + \sin\omega t\right).\vec{u}_r} \;;\; \boxed{\vec{v}_r = r_0\omega\left(-\sin\omega t + \cos\omega t\right).\vec{u}_r}$$

$$\boxed{\vec{v}_e = \vec{\omega}\wedge\vec{r}} \;;\; \vec{v}_e = \begin{vmatrix} \vec{u}_r & -\vec{u}_\theta & \vec{u}_z \\ 0 & 0 & \omega \\ r & 0 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_e = r_0\omega\left(\cos\omega t + \sin\omega t\right)\vec{u}_\theta}$$

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r \Rightarrow \boxed{\vec{v}_a = r_0\omega\left(\cos\omega t + \sin\omega t\right)\vec{u}_\theta + r_0\omega\left(-\sin\omega t + \cos\omega t\right).\vec{u}_r}$$

$$\boxed{v_a = r_0\omega\sqrt{2} = Cte}$$

2/ $$\vec{a}_r = \ddot{r}.\vec{u}_r \Rightarrow \boxed{\vec{a}_r = r_0\omega^2\left(\cos\omega t + \sin\omega t\right).\vec{u}_r}$$

$$\vec{a}_e = \underbrace{\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}}_{0} + \vec{\omega}\wedge\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M} + \underbrace{\frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\overrightarrow{O'M}}_{0} \Rightarrow \boxed{\vec{a}_e = \vec{\omega}\wedge\vec{\omega}\wedge\vec{r}\,'}$$

$$\boxed{\vec{a}_e = -r_0\omega^2\left(\cos\omega t + \sin\omega t\right)\vec{u}_r}$$

$$\boxed{\vec{a}_c = 2r_0\omega^2\left(-\sin\omega t + \cos\omega t\right)\vec{u}_\theta}$$

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c \;;\; \boxed{\vec{a}_a = 2r_0\omega^2\left[\left(\cos\omega t + \sin\omega t\right)\vec{u}_r + \left(-\sin\omega t + \cos\omega t\right)\vec{u}_\theta\right]}$$

$$\boxed{\vec{a}_a = 2r_0\omega^2\sqrt{2} = Cte}$$

Exercice 4.34:

1/ $$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = r.\vec{u}_r \Rightarrow \boxed{\vec{r} = v.t.\vec{u}_r}$$

$$\boxed{\vec{v}_M = v.\vec{u}_r - vt\left|\omega\right|.\vec{u}_\theta}$$

$$\boxed{\vec{a}_M = -v\omega^2 t.\vec{u}_r - 2v\left|\omega\right|.\vec{u}_\theta}$$

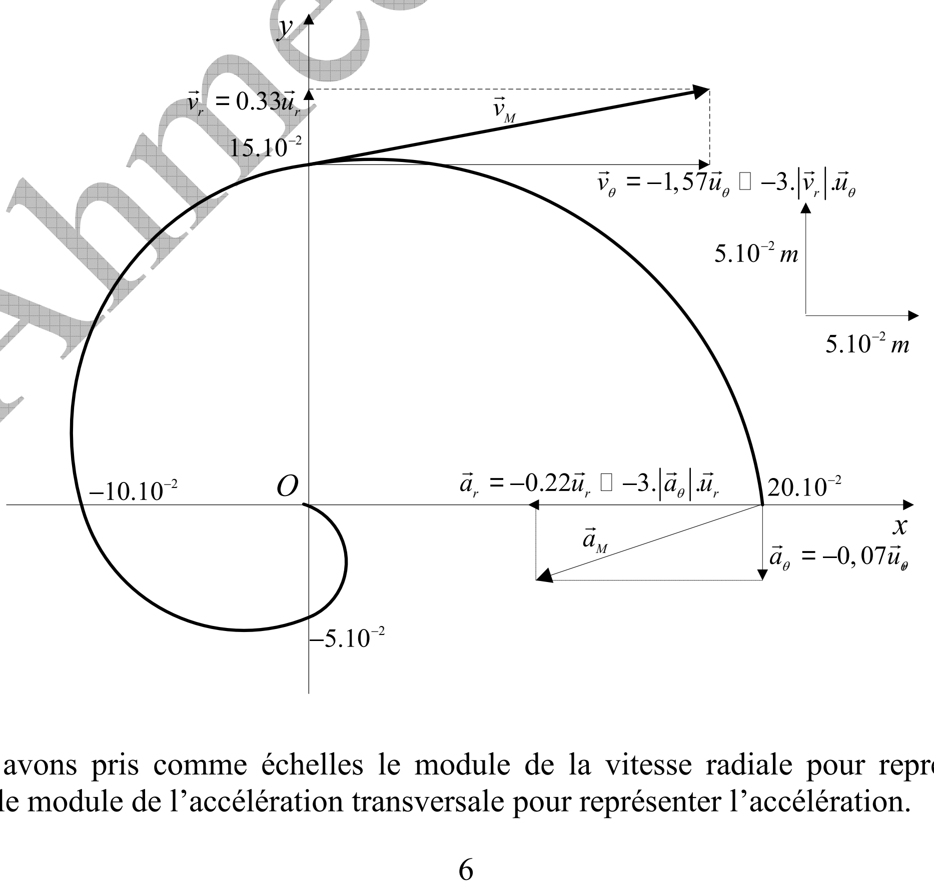
2/

$$v = \frac{0,2}{60} = \frac{10^{-2}}{3}\left(m/s\right) \ ; \ \omega = \frac{2\pi}{60} = \frac{\pi}{30}\left(rad/s\right)$$

$$x_M = vt\cos\omega t = \frac{10^{-2}}{3}.t\cos\frac{\pi}{30}.t \ ; \ y_M = vt\sin\omega t = \frac{10^{-2}}{3}.t\cos\frac{\pi}{30}.t$$

$t\left(s\right)$	0	15	30	45	60
$\theta_M = -\omega t \ \left(rad.s^{-1}\right)$	0	$-\pi/2$	$-\pi$	$-3\pi/2$	-2π
$r_M = vt \ \left(ms^{-1}\right)$	0	-5.10^{-2}	10.10^{-2}	15.10^{-2}	20.10^{-2}
$x_M\left(m\right)$	0	0	-10.10^{-2}	0	20.10^{-2}
$y_M\left(m\right)$	0	-5.10^{-2}	0	15.10^{-2}	0

$t = 45s$:	t = 60s:
$v_M = v.\vec{u}_r - v.t.\omega.\vec{u}_\theta$	$\vec{a}_M = -v\omega^2 t..\vec{u}_r - 2v\omega.\vec{u}_\theta$
$\vec{v}_r = 0,33.\vec{u}_r \ ; \ \vec{v}_\theta = -1,57.\vec{u}_\theta$	$\vec{a}_r = -0,22.\vec{u}_r \ ; \ \vec{a}_\theta = -,07.\vec{u}_\theta$



Nous avons pris comme échelles le module de la vitesse radiale pour représenter la vitesse; et le module de l'accélération transversale pour représenter l'accélération.

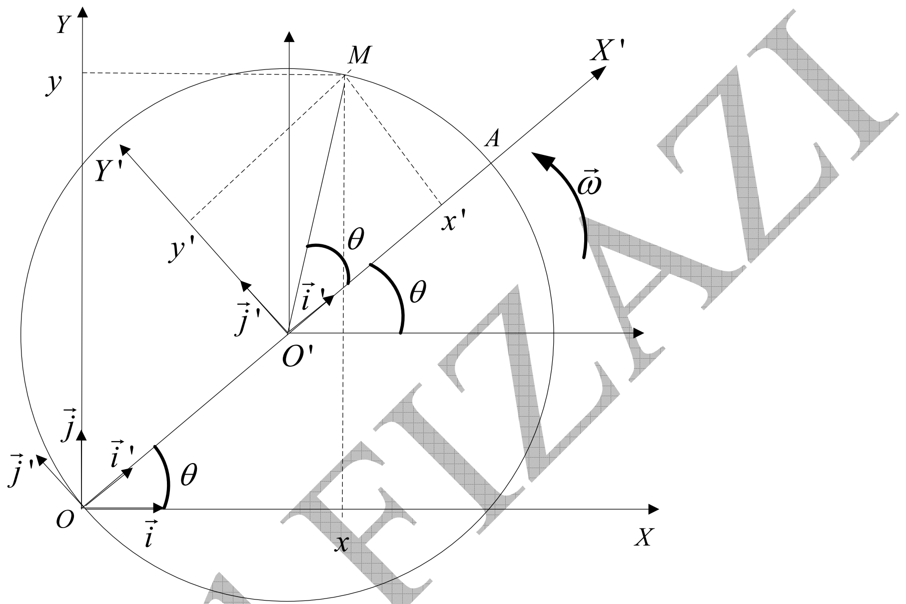
Exercice 4.35:

1/ $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \left(R\cos\omega t + R\cos 2\omega t\right)\vec{i} + \left(R\sin\omega t + R\sin 2\omega t\right)\vec{j}}$$

$$\vec{v}_a = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \ , \ \boxed{\vec{v}_a = -R\omega\left(\sin\omega t + 2\sin 2\omega t\right)\vec{i} + R\omega\left(\cos\omega t + 2\cos 2\omega t\right)\vec{j}}$$

$$\vec{a}_a = \frac{d\vec{v}_a}{dt} \ , \ \boxed{\vec{a}_a = -R\omega^2\left(\cos\omega t + 4\cos 2\omega t\right)\vec{i} - R\omega^2\left(\sin\omega t + 4\sin 2\omega t\right)\vec{j}}$$



2/ $$\boxed{\overrightarrow{O'M} = x'.\vec{i}\,' + y'.\vec{j}\,' = R\left(\cos\omega t.\vec{i}\,' + \sin\omega t.\vec{j}\,'\right)}$$

$$\vec{v}_{r'} = \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} \ , \ \boxed{\vec{v}_{r'} = R\omega\left(-\sin\omega t.\vec{i}\,' + \cos\omega t.\vec{j}\,'\right)}$$

$$\vec{a}_{r'} = \frac{d\vec{v}_{r'}}{dt} \ , \ \boxed{\vec{a}_{r'} = -R\omega^2\left(\cos\omega t.\vec{i}\,' + \sin\omega t.\vec{j}\,'\right)}$$

$$\boxed{\overrightarrow{O'M} = x.\vec{i} + y.\vec{j} = R\left(\cos 2\omega t.\vec{i} + \sin 2\omega t\vec{j}\right)}$$

ATTENTION: il ne faut pas dériver deux fois de suite le vecteur $\overrightarrow{O'M}$ afin d'obtenir la vitesse et l'accélération relatives par rapport à OXY. C'est cette erreur répandue qu'on doit éviter !!

Nous devons faire appel à la relation 4.57 (voir cours)

$$\underbrace{\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}}_{\vec{v}_a} = \underbrace{\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + x'\frac{d\vec{i}\,'}{dt} + y'\frac{d\vec{j}\,'}{dt} + z'\frac{d\vec{k}\,'}{dt}}_{\vec{v}_e} + \underbrace{\vec{i}\,'\frac{dx'}{dt} + \vec{j}\,'\frac{dy'}{dt} + \vec{k}\,'\frac{dz'}{dt}}_{\vec{v}_r}$$

$$\vec{v}_r = \vec{i}\,'\frac{dx'}{dt} + \vec{j}\,'\frac{dy'}{dt} + \vec{k}\,'\underbrace{\frac{dz'}{dt}}_{0}$$

A partir de la figure nous pouvons désigner:

$$\vec{i}\,' = \cos\omega t.\vec{i} + \sin\omega t.\vec{j} \quad ; \quad x' = R\cos\omega t \rightarrow \dot{x}' = -R\omega\sin\omega t$$

$$\vec{j}\,' = -\sin\omega t.\vec{i} + \cos\omega t.\vec{j} \ ; \ y' = R\sin\omega t \rightarrow \dot{y}' = R\omega\cos\omega t$$

Après substitution, nous obtenons:

$$\vec{v}_r = \left(\cos\omega t.\vec{i} + \sin\omega t.\vec{j}\right).\left(-R\omega\sin\omega t\right) + \left(-\sin\omega t.\vec{i} + \cos\omega t.\vec{j}\right)\left(R\omega\cos\omega t\right)$$

$$\vec{v}_r = -2R\omega.\underbrace{\sin\omega t.\cos\omega t}_{\frac{1}{2}\sin 2\omega t}.\vec{i} + R\omega\left(\underbrace{-\sin^2\omega t + \cos^2\omega t}_{\cos 2\omega t}\right)\vec{j}$$

A la fin, la vitesse relative du mobile M par rapport à OXY est:

$$\boxed{\vec{v}_r = R\omega\left(-\sin 2\omega t.\vec{i} + \cos 2\omega t.\vec{j}\right)} \rightarrow (3)$$

L'accélération relative du mobile M par rapport à OXY n'est pas égale à la dérivée de $\vec{v}$ par rapport au temps. Il faut utiliser la relation 4.59 (voir cours).

$$\vec{a}_r = \vec{i}\,'\frac{d^2x'}{dt^2} + \vec{j}\,'\frac{d^2y'}{dt^2} + \underbrace{\vec{k}\,'\frac{d^2z'}{dt^2}}_{0}$$

$$\vec{i}\,' = \cos\omega t.\vec{i} + \sin\omega t.\vec{j} \quad ; \quad x' = R\cos\omega t \rightarrow \ddot{x}' = -R\omega^2\cos\omega t$$

$$\vec{j}\,' = -\sin\omega t.\vec{i} + \cos\omega t.\vec{j} \; ; \; y' = R\sin\omega t \rightarrow \ddot{y}' = -R\omega^2\sin\omega t$$

En remplaçant on obtient:

$$\vec{a}_r = \left(\cos\omega t.\vec{i} + \sin\omega t.\vec{j}\right)\left(-R\omega^2\cos\omega t\right) + \left(-\sin\omega t.\vec{i} + \cos\omega t.\vec{j}\right)\left(-R\omega^2\sin\omega t\right)$$

$$\vec{a}_r = \left(-R\omega^2\cos^2\omega t.\vec{i} - R\omega^2\cos\omega t\sin\omega t.\vec{j}\right) + \left(R\omega^2 s\text{in}^2\,\omega t.\vec{i} - R\omega^2\cos\omega t\sin\omega t.\vec{j}\right)$$

$$\vec{a}_r = -R\omega^2\left(\underbrace{\cos^2\omega t - \sin^2\omega t}_{\cos 2\omega t}\right).\vec{i} - R\omega^2\,2\underbrace{\cos\omega t\sin\omega t}_{\frac{1}{2}\sin 2\omega t}.\vec{j}$$

A la fin l'accélération relative du mobile M par rapport à OXY est égale à:

$$\boxed{\vec{a}_r = -R\omega^2\left(\cos 2\omega t.\vec{i} + \sin 2\omega t.\vec{j}\right)} \rightarrow (4)$$

3/ a/ La vitesse d'entraînement, en utilisant la loi de composition des vitesses est:

$$(1) - (3) = \vec{v}_e = \vec{v}_a - \vec{v}_r$$

$$\vec{v}_e = \left[-R\omega\left(\sin\omega t + 2\sin 2\omega t\right)\vec{i} + R\omega\left(\cos\omega t + 2\cos 2\omega t\right)\vec{j}\;\right] - \left[R\omega\left(-\sin 2\omega t.\vec{i} + \cos 2\omega t.\vec{j}\right)\right]$$

$$\boxed{\vec{v}_e = -R\omega\left(\sin\omega t + \sin 2\omega t\right).\vec{i} + R\omega\left(\cos\omega t + \cos 2\omega t\right).\vec{j}}$$

b/

$$\vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + x'\frac{d^2\vec{i}\,'}{dt^2} + y'\frac{d^2\vec{j}\,'}{dt^2} + \underbrace{z'\frac{d^2\vec{k}\,'}{dt^2}}_{0}$$

$$\overrightarrow{OO'} = R.\cos\omega t.\vec{i} + R\sin\omega t.\vec{j} \quad , \quad \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} = -R\omega^2.\cos\omega t.\vec{i} - R\omega^2\sin\omega t.\vec{j}$$

$$\ddot{\vec{i}}\,' = -\omega^2\cos\omega t.\vec{i} - \omega^2\sin\omega t.\vec{j} \quad ; \quad x' = R\cos\omega t$$

$$\ddot{\vec{j}}\,' = \omega^2\sin\omega t.\vec{i} - \omega^2 c\,\text{os}\,\omega t.\vec{j} \; ; \qquad y' = R\sin\omega t$$

En remplaçant on obtient:

$$\vec{a}_e = \left(-R\omega^2.\cos\omega t.\vec{i} - R\omega^2\sin\omega t.\vec{j}\right) + R\cos\omega t\left(-\omega^2\cos\omega t.\vec{i} - \omega^2\sin\omega t.\vec{j}\right) +$$

$$R\sin\omega t\left(\omega^2\sin\omega t.\vec{i} - \omega^2 c\,\text{os}\,\omega t.\vec{j}\right)$$

D'où l'accélération d'entraînement du mobile M :

$$\vec{a}_e = \left[-R\omega^2.\cos\omega t - R\omega^2\left(\underbrace{-\sin^2\omega t + \cos^2\omega t}_{\cos 2\omega t}\right)\right]\vec{i} - R\omega^2\left(\sin\omega t + 2\underbrace{\sin\omega t.c\,os\,\omega t}_{\frac{1}{2}\sin 2\omega t}\right)\vec{j}$$

$$\boxed{\vec{a}_e = -R\omega^2.(\cos\omega t + \cos 2\omega t)\vec{i} - R\omega^2(\sin\omega t + \sin 2\omega t)\vec{j}}$$

Déduction de l'accélération de Coriolis ou accélération complémentaire:

$$\vec{a}_c = 2\left[\frac{dx'.d\vec{i}\,'}{dt^2} + \frac{dy'.d\vec{j}\,'}{dt^2}\right]$$

ou à partir de la relation 4.59:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_r + \vec{a}_c \Rightarrow \boxed{\vec{a}_c = +\vec{a}_a - \vec{a}_r - \vec{a}_r}$$

Le résultat est le même.

$$\dot{\vec{i}}\,' = -\omega\sin\omega t.\vec{i} + \omega\cos\omega t.\vec{j} \quad ; \quad \dot{\vec{x}}\,' = -R\omega\sin\omega t$$

$$\vec{j}\,' = -\omega\cos\omega t.\vec{i} - \omega\sin\omega t.\vec{j} \;;\; \dot{\vec{y}}\,' = R\omega\cos\omega t$$

$$\vec{a}_c = 2\left[\frac{dx'.d\vec{i}\,'}{dt^2} + \frac{dy'.d\vec{j}\,'}{dt^2}\right] = \vec{a}_r + \vec{a}_r + \vec{a}_c$$

$$\vec{a}_c = 2\left[-R\omega\sin\omega t\left(-\omega\sin\omega t.\vec{i} + \omega\cos\omega t.\vec{j}\right) + R\omega\cos\omega t\left(-\omega\cos\omega t.\vec{i} - \omega\sin\omega t.\vec{j}\right)\right]$$

$$\vec{a}_c = 2\left[R\omega^2.\sin^2\omega t.\vec{i} - R\omega^2.\sin\omega t\cos\omega t.\vec{j} - R\omega^2.\cos^2\omega t.\vec{i} - R\omega^2.\cos\omega t\sin\omega t.\vec{j}\right]$$

$$\vec{a}_c = 2\left[R\omega^2.\left(\underbrace{\sin^2\omega t - \cos^2\omega t}_{-\cos\omega t}\right).\vec{i} - 2R\omega^2.\underbrace{\sin\omega t\cos\omega t}_{\frac{1}{2}\sin 2\omega t}.\vec{j}\right]$$

$$\boxed{\vec{a}_c = -2R\omega^2\left(\cos 2\omega t.\vec{i} + \sin 2\omega t.\vec{j}\right)}$$

Il faudra vérifier le résultat par le calcul direct $\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_r + \vec{a}_c$

4/ Introduisons à présent le vecteur de rotation $\vec{\omega} = \omega.\vec{k}$. nous utilisons la loi(4.72) démontrée en cours pour calculer les deux composantes de la vitesse d'entraînement:

$$\boxed{\vec{v}_e = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \vec{\omega}\wedge\overline{O'M}}$$

$$\vec{v}_e = -R\omega.\sin\omega t.\vec{i} + R\omega.\cos\omega t.\vec{j} + \begin{vmatrix} \vec{i} & -\vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ R\cos 2\omega t & R\sin 2\omega t & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{v}_e = -R\omega.\sin\omega t.\vec{i} + R\omega.\cos\omega t.\vec{j} - R\omega.\sin 2\omega t.\vec{i} + R\omega.\sin 2\omega t.\vec{j}$$

$$\boxed{\vec{v}_e = -R\omega.(\sin\omega t + \sin 2\omega t).\vec{i} + R\omega.(\cos\omega t + \sin 2\omega t).\vec{j}}$$

Nous utilisons la formule (4.73) démontrée en cours pour trouver l'accélération complémentaire ou accélération de Coriolis:

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r \Rightarrow \vec{a}_c = 2\begin{vmatrix} \vec{i} & -\vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ -R\omega.\sin 2\omega t & R\omega.\cos 2\omega t & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{a}_c = -2R\omega^2.\cos 2\omega t.\vec{i} - 2R\omega^2.\sin 2\omega t.\vec{j}$$

$$\boxed{\vec{a}_c = -2R\omega^2.\left(\cos 2\omega t.\vec{i} + \sin 2\omega t.\vec{j}\right)}$$

EXERCICES

تـــمـــاريـــن

Exercice 4.29

On laisse tomber d'un immeuble de hauteur h une bille sans vitesse initiale. La chute de celle-ci s'effectue à la verticale selon un mouvement uniformément accéléré d'accélération g .

1/ Quelle est la trajectoire de la bille dans un référentiel lié à une voiture se déplaçant suivant un mouvement rectiligne et uniforme de vitesse $\vec{v}$ et passant à la verticale de chute au moment du lâcher ?

2/ Quelle est la trajectoire de la bille dans le même référentiel si on admet que la voiture entame au moment du lâcher et à partir de la verticale de chute un mouvement rectiligne uniformément accéléré d'accélération $\vec{a}_e$?

(représenter dans chaque cas la trajectoire demandée).

تمرين 29.4

من أعلى بناية ارتفاعها h نترك كرية تسقط بدون سرعة ابتدائية. سقوطها يجري وفق الشاقول بحركة متسارعة بانتظام بتسارع g.

1/ ما هو مسار الكرية في مرجع مرتبط بسيارة تسير بحركة مستقيمة منتظمة بسرعة $\vec{v}$ و تمرّ بشاقول السقوط لحظة ترك الكرية؟

2/ ما هو مسار الكرية في نفس المرجع المذكور إذا افترضنا أن السيارة، لحظة ترك الكرية تسقط، تنطلق بحركة مستقيمة متسارعة بانتظام بتسارع $\vec{a}_e$ ؟

(مثل في كل حالة المسار المطلوب).

Exercice 4.30

On considère dans le repère fixe OXY le système de deux axes Oxy mobiles tel que l'axe Ox forme l'angle θ avec l'axe OX . Un point matériel M se déplace sur l'axe Ox , sa position est définie par $r = OM$. Calculer :

1/ la vitesse et l'accélération relatives du point,

2/ la vitesse et l'accélération d'entraînement,

3/ l'accélération Coriolis.

4/ En déduire la vitesse et l'accélération absolue du point M dans les coordonnées polaires.

تمرين 30.4

نعتبر في المستوي الثابت OXY جملة محورين Oxy متحركين حيث يشكل المحور Ox زاوية θ مع المحور OX. تتحرك نقطة مادية M على المحور Ox و هي معرّفة بـــ $r = OM$. أحسب:

1/ السرعة و التسارع النسبيين للنقطة M،

2/ سرعة و تسارع الجرّ،

3/ تسارع كوريوليس،

4/ إستنتج السرعة و التسارع المطلقين لـــ M بالإحداثيات القطبية.

Exercice 4.31

Dans le plan XOY , une droite OX' tourne autour de l'axe OZ avec une vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$ constante. Un mobile $M\left(OM = r\right)$ se déplace sur la droite OX' d'un mouvement rectiligne uniformément accéléré d'accélération a . A l'instant initial M se trouve en M_0 , au repos, puis s'éloigne de O .

1/Déterminer les expressions littérales vectorielles des vitesses relative, d'entraînement et absolue de M .

Déterminer les expressions littérales donnant la norme et la direction du vecteur vitesse absolue du point M .

2/ Si l'axe OX' est confondu avec l'axe OX à

تمرين 31.4

في المستوى XOY ، يدور مستقيم OX' حول المحور OZ بسرعة زاوية ثابتة $\omega = \dot{\theta}$. ينتقل متحرك $M\left(OM = r\right)$ على المستقيم OX' بحركة مستقيمة متغيرة بانتظام بتسارع a. في اللحظة الابتدائية M يوجد في M_0 ، في حالة سكون، ثم يبتعد عن O.

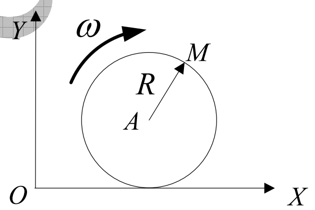
1/ عيّن العبارات الحرفية الشعاعية للسرعات النسبية، الجر و المطلقة لـــ M.

عيّن العبارات الحرفية التي تعطي معيار(الشدة) و جهة شعاع السرعة المطلقة للنقطة M.

2/ إذا كان المحور OX' منطبق على المحور OX في

l'instant initial, calculer les coordonnées du point M à la date $t = 3s$. Dessiner les trois vecteurs vitesses à cette date. 3/ Déterminer les expressions littérales vectorielles dans une base polaire des accélérations relative, d'entraînement et de Coriolis de M . Déterminer les expressions littérales donnant la norme et la direction du vecteur accélération absolue du point M . Dessiner ces vecteurs accélérations à t =3s. Données: $OM_0 = 1cm$; $a = 2cm.s^{-2}$; $\omega = \dot{\theta} = \frac{\pi}{5} rad.s^{-1}$.	اللحظة الإبتدائية، أحسب إحداثيات النقطة M في اللحظة $t = 3s$. أرسم أشعة السرعة الثلاثة في هذه اللحظة M . 3/ عيّن العبارات الحرفية الشعاعية في قاعدة للإحداثيات القطبية للتسارعات النسبية، الجر و كوريوليس لـــ M . عيّن العبارات الحرفية التي تعطي معيار(الشدة) و جهة شعاع التسارع المطلق للنقطة M . أرسم أشعة التسارعات هذه في M . المعطيات: $OM_0 = 1cm$ ، $a = 2cm.s^{-2}$ ، $\omega = \dot{\theta} = \frac{\pi}{5} rad.s^{-1}$

Exercice 4.32 Un disque circulaire de centre A et de rayon R roule sans glisser sur l'axe OX avec une vitesse angulaire ω constante. Au départ $t = 0$, un point M de la circonférence coïncide avec l'origine O . 1/ Quelles sont les coordonnées du point M au temps t en fonction de ω, R et t ? En déduire la nature de la trajectoire. 2/ Calculer la vitesse absolue et la vitesse relative en précisant leurs directions par rapport à l'axe OX . 3/ A partir des expressions des vecteurs de la vitesse absolue et la vitesse relative, vérifier la norme et la direction du vecteur vitesse d'entraînement.	**تمرين 32.4** في المستوي XOY يتدحرج (يدور بدون انزلاق) قرص دائري نصف قطره R و مركزه A على المحور OX بسرعة زاوية ثابتة ω . في البداية $t = 0$ ، تنطبق نقطة M من محيط القرص مع المبدإ O . 1/ ما هي إحداثيتي النقطة M في اللحظة t بدلالة ω, R و t ؟ إستنتج طبيعة المسار؟ 2/ أحسب السرعة المطلقة و السرعة النسبية و وضح جهتيهما بالنسبة للمحور OX . 3/ انطلاقا من عبارتي شعاعي السرعة المطلقة و النسبية تأكد من طويلة و جهة سرعة الجر.



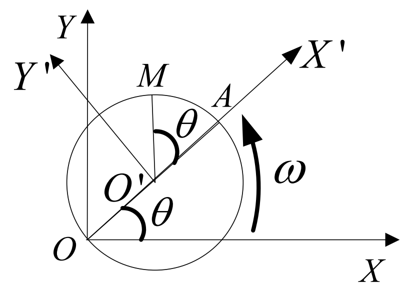
Exercice 4.33 Dans le plan XOY , une droite tourne autour de OZ avec une vitesse constante $\omega = \dot{\theta}$. Un point mobile $M\left(OM = r\right)$ se déplace sur la droite OX' suivant la loi : $r = r_0\left(\cos\omega t + \sin\omega t\right)$ avec $r_0 = cte$. 1/ Déterminer à l'instant t en fonction de $_0$ et ω, la vitesse relative et la vitesse d'entraînement de M par leurs projections dans le repère mobile $X'O'Y'$. En déduire la vitesse absolue exprimée dans cette même base de projection, et montrer que le module de celui-ci est constant.	**تمرين 33.4** في مستوي XOY ، يدور مستقيم حول OZ بسرعة ثابتة $\omega = \dot{\theta}$. تنتقل نقطة $M\left(OM = r\right)$ متحركة على المستقيم OX' وفق القانون: $r_0 = cte$ مع $r = r_0\left(\cos\omega t + \sin\omega t\right)$ 1/ حدّد في اللحظة t بدلالة $_0$ و ω ، السرعة النسبية و سرعة الجر لـــ M بمسقطيهما في المعلم المتحرك $X'O'Y'$. إستنتج السرعة المطلقة المعبر عنها في نفس قاعدة الإسقاط، و بين أن شدة هذه ثابتة. 2/ حدد في اللحظة t بدلالة $_0$ و ω ، التسارع النسبي

2/ Déterminer à l'instant t en fonction de $_0$ et ω, l'accélération relative l'accélération d'entraînement et l'accélération complémentaire de M par leurs projections dans le repère mobile $X'O'Y'$. En déduire l'accélération absolue exprimée dans cette même base de projection, et montrer que le module de celle-ci est constant.	تسارع الجر و التسارع التكميلي لـــ M بإسقاطاتها في المعلم المتحرك $X'O'Y'$. إستنتج التسارع المطلق المعبر عنه في نفس قاعدة الإسقاط، و بين أن شدة هذا ثابتة.

Exercice 4.34 Une mouche M se déplace sur l'aiguille des secondes d'une montre accrochée à un mur vertical avec un mouvement uniforme de vitesse v. La mouche part du point O à l'instant $t=0$ pour atteindre l'extrémité de l'aiguille de longueur $20cm$ une minute plus tard. 1/ Ecrire les expressions de la vitesse $\vec{v}_M$ et de l'accélération $\vec{a}_M$ de M dans la base mobile $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ associée à la mouche. 2/ Calculer les coordonnées θ_M, x_M, y_M de la mouche aux instants $0s, 15s, 30s, 45s, 60s$. Dessiner la trajectoire sur le mur. 3/ Représenter sur la trajectoire le vecteur vitesse $\vec{v}_M$ au temps $t=45s$ et le vecteur accélération $\vec{a}_M$ au temps $t=60s$.	**تمرين 34.4** تنتقل ذبابة M على رقاص الثواني لساعة مثبتة على جدار عمودي بحركة منتظمة سرعتها v. تنطلق الذبابة من النقطة O في اللحظة $t=0$ لتصل بعد دقيقة واحدة إلى نهاية الرقاص الذي طوله $20cm$. 1/ أكتب عبارتي السرعة $\vec{v}_M$ و التسارع $\vec{a}_M$ لـــ M في القاعدة المتحركة $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ المرتبطة بالذبابة. 2/ أحسب الإحداثيات θ_M, x_M, y_M للذبابة في اللحظات $0s, 15s, 30s, 45s, 60s$. أرسم المسار على الجدار. 3/ مثل على المسار شعاع السرعة $\vec{v}_M$ في اللحظة $t=45s$ و شعاع التسارع $\vec{a}_M$ في اللحظة $t=60s$.

Exercice 4.35 Dans le plan OXY, un cercle de rayon R, de diamètre OA, tourne à la vitesse angulaire constante ω autour du point O. On lie à son centre mobile O' deux axes rectangulaires $O'X'Y'$ (l'axe $O'X'$ est dirigé suivant OA). A l'instant $t=0$, A est sur OX, OX et OX' étant colinéaires. Un point M, initialement en A, parcourt la circonférence dans le sens positif avec la même vitesse angulaire ω. 1/ Calculer directement les composantes des vecteurs vitesse et accélération de M dans le repère OXY (en dérivant les composantes de $\overrightarrow{OM}$). 2/ Calculer les composantes de la vitesse et de l'accélération relatives de M dans le repère $O'X'Y'$ puis dans OXY. 3/ a/ Calculer les composantes de la vitesse d'entraînement dans le repère OXY par la loi de composition des vitesses. b/ Calculer de même les composantes de l'accélération d'entraînement dans le repère OXY ; en déduire l'accélération complémentaire (Coriolis). 4/ vérifier les expressions des composantes de la vitesse	**تمرين 35.4** في المستوي OXY، يدور قرص نصف قطره R وقطر OA بسرعة زاوية ثابتة ω حول النقطة O. نشرك لمركزه المتحرك O' محورين مستطيلين $O'X'Y'$ (المحور $O'X'$ موجه وفق OA). في اللحظة $t=0$، A يقع على OX، OX و OX' متوافقان خطيا. نقطة M، كانت في البداية في A ، تنتقل على المحيط في الاتجاه الموجب بنفس السرعة الزاوية ω. 1/ أحسب مباشرة مركبتي شعاعي سرعة و تسارع M في المعلم OXY (نشتق مركبات $\overrightarrow{OM}$). 2/ أحسب مركبات السرعة والتسارع النسبيين لـــ M في المعلم $O'X'Y'$ ثم في OXY. 3/ ا/ أحسب مركبات سرعة الجر في المعلم OXY باستعمال قانون تركيب السرعات. ب/ أحسب بالمثل مركبات تسارع الجر في المعلم OXY ؛ إستنتج التسارع التكميلي(كوريوليس). 4/ تأكد من مركبات سرعة الجر و تسارع الجر التكميلي باستعمال العبارات التي تقحم شعاع الدوران $\vec{\omega}$.

d'entraînement et celle de l'accélération complémentaire en utilisant les expressions faisant intervenir le vecteur rotation $\vec{\omega}$.	



Corrigés des exercices 3.1 à 3.7 حلول التمارين من 1.3 إلى 7.3

Exercice 3.1:

Si l'expression du vecteur en coordonnées cartésiennes est $\vec{V} = X\vec{i} + Y\vec{j}$, alors, il est possible d'écrire l'expression du même vecteur en coordonnées polaires sous la forme: $\vec{V} = V_r.\vec{u}_r + V_\varphi.\vec{u}_\varphi$. Connaissant les expressions des vecteurs unitaires $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\varphi$ dans la base $(\vec{i},\vec{j})$, on peut déterminer les valeurs V_r et V_φ.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u}_r = \vec{i}.\cos\varphi + \vec{j}.\sin\varphi \\ \vec{u}_\varphi = -\vec{i}.\sin\varphi + \vec{j}.\cos\varphi \end{array}\right| \Rightarrow \vec{V} = V_r\left(\vec{i}.\cos\varphi + \vec{j}.\sin\varphi\right) + V_\varphi\left(-\vec{i}.\sin\varphi + \vec{j}.\cos\varphi\right)$$

En organisant la dernière équation:

$$\vec{V} = \vec{i}\left(\underbrace{V_r\cos\varphi - V_\varphi\sin\varphi}_{X}\right) + \vec{j}\left(\underbrace{V_r\sin\varphi + V_\varphi\cos\varphi}_{Y}\right)$$

Ainsi nous aboutissons à un système de deux équations à deux inconnues V_r et V_φ :

$$\begin{cases} V_r\cos\varphi - V_\varphi\sin\varphi = X \\ V_r\sin\varphi + V_\varphi\cos\varphi = Y \end{cases}$$

Après résolution on trouve:

$$\boxed{V_r = X\cos\varphi + Y\sin\varphi} \; ; \; \boxed{V_\varphi = -X\sin\varphi + Y\cos\varphi}$$

L'expression du vecteur $\vec{V}$ est donc :

$$\boxed{\vec{V} = \left(X\cos\varphi + Y\sin\varphi\right)\vec{u}_r + \left(-X\sin\varphi + Y\cos\varphi\right)\vec{u}_\varphi}$$

Nous constatons que, pour trouver les deux résultats précédents, il y a beaucoup de calculs à faire si on suit la méthode algébrique ordinaire. Il est plus facile et plus rapide si on opte pour la méthode des matrices. Rappelons brièvement cette dernière méthode:
On part de l'étape où nous avons obtenu les deux équations :

$$X = V_r\cos\varphi - V_\varphi\sin\varphi$$

$$Y = V_r\sin\varphi + V_\varphi\cos\varphi$$

Nous créons une matrice de déplacement:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_r \\ V_\varphi \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} V_r \\ V_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

Le résultat est:

$$\boxed{V_r = X\cos\varphi + Y\sin\varphi} \; ; \; \boxed{V_\varphi = -X\sin\varphi + Y\cos\varphi}$$

L'expression du vecteur $\vec{V} = X\vec{i} + Y\vec{j}$ en coordonnées polaires est donc:

$$\boxed{\vec{V} = \left(X\cos\varphi + Y\sin\varphi\right)\vec{u}_r + \left(-X\sin\varphi + Y\cos\varphi\right)\vec{u}_\varphi}$$

Exercice 3.2:

Le vecteur s'écrit : $\vec{V} = V_r.\vec{u}_r + V_\theta.\vec{u}_\theta + V_\varphi.\vec{u}_\varphi$

Dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, il s'écrit $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

Il faut se rappeler des expressions des vecteurs unitaires $\left(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi\right)$ en fonction de $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$:

$$\vec{V} = V_r\left(\vec{i}.\sin\theta\cos\varphi + \vec{j}.\sin\theta\sin\varphi + \vec{k}.\cos\theta\right) + V_\theta\left(\vec{i}.\cos\theta\cos\varphi + \vec{j}.\cos\theta\sin\varphi - \vec{k}.\sin\theta\right) +$$
$$V_\varphi\left(-\vec{i}.\sin\varphi + \vec{j}.\cos\varphi\right)$$

Développons et organisons la dernière équation pour trouver l'expression du vecteur $\vec{V}$ en coordonnées cartésiennes.

…….

Les coordonnées cartésiennes sont:

$$X = V_r\sin\theta\cos\varphi + V_\theta\cos\theta\cos\varphi - V_\varphi\sin\varphi$$
$$Y = V_r\sin\theta\sin\varphi + V_\theta\cos\theta\sin\varphi + V_\varphi\cos\varphi$$
$$Z = V_r\cos\theta - V_\theta\sin\theta$$

Le vecteur $\vec{V} = V_r.\vec{u}_r + V_\theta.\vec{u}_\theta + V_\varphi.\vec{u}_\varphi$ s'écrit donc dans la base $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$:

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{V} = &\left(V_r\sin\theta\cos\varphi + V_\theta\cos\theta\cos\varphi - V_\varphi\sin\varphi\right)\vec{i} + \left(V_r\sin\theta\sin\varphi + V_\theta\cos\theta\sin\varphi + V_\varphi\cos\varphi\right)\vec{j} + \\ &\left(V_r\cos\theta - V_\theta\sin\theta\right)\vec{k}\end{aligned}}$$

Exercice 3.3:

Le vecteur $\vec{V}$ dans la base $\left(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\varphi, \vec{u}_z\right)$ s'écrit sous la forme: $\vec{V} = V_\rho.\vec{u}_\rho + V_\varphi.\vec{u}_\varphi + V_z.\vec{u}_z$

Connaissant les expressions des vecteurs unitaires $\left(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\varphi, \vec{u}_z\right)$ en fonction de $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ on peut écrire:

$$\left.\begin{aligned}\vec{u}_\rho &= \vec{i}.\cos\varphi + \vec{j}.\sin\varphi \\ \vec{u}_\varphi &= -\vec{i}.\sin\varphi + \vec{j}.\cos\varphi \\ \vec{u}_z &= \vec{k}\end{aligned}\right| \Rightarrow \vec{V} = V_r\left(\vec{i}.\cos\varphi + \vec{j}.\sin\varphi\right) + V_\varphi\left(-\vec{i}.\sin\varphi + \vec{j}.\cos\varphi\right) + V_z\vec{k}$$

En organisant l'expression obtenue elle devient:

$$\vec{V} = \vec{i}\left(\underbrace{V_\rho\cos\varphi - V_\varphi\sin\varphi}_{X}\right) + \vec{j}\left(\underbrace{V_\rho\sin\varphi + V_\varphi\cos\varphi}_{Y}\right) + \underbrace{V_z}_{Z}\vec{k}$$

On obtient un système de trois équations à trois inconnues V_ρ, V_φ et V_z

$$\begin{cases}X = V_r\cos\varphi - V_\varphi\sin\varphi \\ Y = V_r\sin\varphi + V_\varphi\cos\varphi \\ Z = V_z\end{cases}$$

On a le droit de choisir la méthode que nous maîtrisons le mieux pour arriver au résultat attendu. Si on choisit la méthode des matrices le raisonnement est le suivant:

On crée une matrice de déplacement à partir du système d'équations obtenu:

$$\begin{bmatrix}X \\ Y \\ Z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_\rho \\ V_\varphi \\ V_z\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}V_\rho \\ V_\varphi \\ V_z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X \\ Y \\ Z\end{bmatrix}$$

Le résultat se déduit directement:

$$\boxed{V_\rho = X\cos\varphi + Y\sin\varphi} \;;\; \boxed{V_\varphi = -X\sin\varphi + Y\cos\varphi} \;;\; \boxed{V_z = Z}$$

$$\boxed{\vec{V} = \left(X\cos\varphi + Y\sin\varphi\right)\vec{u}_\rho + \left(-X\sin\varphi + Y\cos\varphi\right)\vec{u}_\varphi + Z\vec{u}_z}$$

Exercice 3.4:

Le vecteur $\vec{V}$ dans la base $\left(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi\right)$ s'écrit sous la forme : $\vec{V} = V_r.\vec{u}_r + V_\theta.\vec{u}_\theta + V_\varphi.\vec{u}_\varphi$

Connaissant les expressions des vecteurs unitaires $\left(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi\right)$ en fonction de $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, on peut écrire:

$$\vec{u}_r = \vec{i}.\sin\theta\cos\varphi + \vec{j}.\sin\theta\sin\varphi + \vec{k}.\cos\theta$$
$$\vec{u}_\theta = \vec{i}.\cos\theta\cos\varphi + \vec{j}.\cos\theta\sin\varphi - \vec{k}.\sin\theta$$
$$\vec{u}_\varphi = -\vec{i}.\sin\varphi + \vec{j}.\cos\varphi$$

$$\vec{V} = V_r\left(\vec{i}.\sin\theta\cos\varphi + \vec{j}.\sin\theta\sin\varphi + \vec{k}.\cos\theta\right) + V_\theta\left(\vec{i}.\cos\theta\cos\varphi + \vec{j}.\cos\theta\sin\varphi - \vec{k}.\sin\theta\right) + V_\varphi\left(-\vec{i}.\sin\varphi + \vec{j}.\cos\varphi\right)$$

Développons puis organisons l'équation précédente pour obtenir:

$$\vec{V} = \vec{i}\left(\underbrace{V_r\sin\theta\cos\varphi + V_\theta\cos\theta\cos\varphi + -V_\varphi\sin\varphi}_{X}\right) + \vec{j}\left(\underbrace{V_r\sin\theta\sin\varphi + V_\theta\cos\theta\sin\varphi + \cos\varphi}_{Y}\right) + \vec{k}\left(\underbrace{V_r\cos\theta - V_\theta\sin\theta}_{Z}\right)$$

On constitue un système de trois équations à trois inconnues V_r , V_θ et V_φ :

$$\begin{cases} X = V_r\sin\theta\cos\varphi + V_\theta\cos\theta\cos\varphi - V_\varphi\sin\varphi \\ Y = V_r\sin\theta\sin\varphi + V_\theta\cos\theta\sin\varphi + V_\varphi\cos\varphi \\ Z = V_r\cos\theta - V_\theta\sin\theta \end{cases}$$

Si on choisit la méthode des matrices, qui a fait preuve d'aboutir au résultat escompté très facilement et très rapidement, on doit d'abord construire la matrice de déplacement à partir du système d'équations précédent:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_r \\ V_\theta \\ V_\varphi \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} V_r \\ V_\theta \\ V_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & -\sin\varphi & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

On trouve:

$$\boxed{V_r = X\sin\theta\cos\varphi + Y\sin\theta\sin\varphi + Z\cos\theta} \;;\; \boxed{V_\theta = X\cos\theta\cos\varphi + Y\cos\theta\sin\varphi - Z\sin\theta}$$

$$\boxed{V_\varphi = -X\sin\varphi + Y\cos\varphi}$$

En fin de compte l'expression du vecteur $\vec{V} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$ en coordonnées sphériques est:

$$\boxed{\vec{V} = \left(X\sin\theta\cos\varphi + Y\sin\theta\sin\varphi + Z\cos\theta\right)\vec{u}_r + \left(X\cos\theta\cos\varphi + Y\cos\theta\sin\varphi - Z\sin\theta\right)\vec{u}_\theta + \left(-X\sin\varphi + Y\cos\varphi\right)\vec{u}_\varphi}$$

Exercice 3.5:

Commençons par transformer le vecteur $\vec{A}=\rho^2\vec{u}+\cos\varphi.\vec{u}_\varphi$ en coordonnées cartésiennes:

$$\vec{A}=\rho^2\left(\vec{i}.\cos\varphi+\vec{j}.\sin\varphi\right)+\cos\varphi\left(-\vec{i}\sin\varphi+\vec{j}\cos\varphi\right)$$

En développant et en organisant l'équation, nous obtenons l'expression du vecteur $\vec{A}$ en coordonnées cartésiennes:

$$\vec{A}=\vec{i}\left(\underbrace{\rho^2.\cos\varphi-\cos\varphi.\sin\varphi}_{X}\right)+\vec{j}\left(\underbrace{\rho^2\sin\varphi+\cos^2\varphi}_{Y}\right)+\underbrace{0}_{Z}\vec{k}$$

$$X=\rho^2.\cos\varphi-\cos\varphi.\sin\varphi\ ;\ Y=\rho^2\sin\varphi+\cos^2\varphi\ ;\ Z=0$$

On doit maintenant transformer cette dernière expression en coordonnées sphériques en faisant appel au résultat de l'exercice 3.4:

$$\vec{A}=\left(X\sin\theta\cos\varphi+Y\sin\theta\sin\varphi+Z\cos\theta\right)\vec{u}_r+\left(X\cos\theta\cos\varphi+Y\cos\theta\sin\varphi-Z\sin\theta\right)\vec{u}_\theta+$$
$$\left(-X\sin\varphi+Y\cos\varphi\right)\vec{u}_\varphi$$

Il ne nous reste plus qu'à remplacer X,Y,Z par leurs valeurs respectives trouvées ci-dessus:

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{A}=&\left[\left(\rho^2.\cos\varphi-\cos\varphi.\sin\varphi\right)\sin\theta\cos\varphi+\left(\rho^2\sin\varphi+\cos^2\varphi\right)\sin\theta\sin\varphi\right]\vec{u}_r+\\&\left[\left(\rho^2.\cos\varphi-\cos\varphi.\sin\varphi\right)\cos\theta\cos\varphi+\left(\rho^2\sin\varphi+\cos^2\varphi\right)\cos\theta\sin\varphi\right]\vec{u}_\theta+\\&\left[\left(-\rho^2.\cos\varphi+\cos\varphi.\sin\varphi\right)\sin\varphi+\left(\rho^2\sin\varphi+\cos^2\varphi\right)\cos\varphi\right]\vec{u}_\varphi\end{aligned}}$$

Exercice 3.6:

Le vecteur $\vec{V}$ dans la base $\left(\vec{u}_\rho,\vec{u}_\varphi,\vec{u}_z\right)$ est $\vec{V}=V_\rho.\vec{u}_\rho+V_\varphi.\vec{u}_\varphi+V_z.\vec{u}_z$. Partant des expressions connues des vecteurs unitaires $\left(\vec{u}_\rho,\vec{u}_\varphi,\vec{u}_z\right)$ en fonction de $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$, on peut écrire:

$$\left.\begin{aligned}\vec{u}_\rho&=\vec{i}.\cos\varphi+\vec{j}.\sin\varphi\\\vec{u}_\varphi&=-\vec{i}.\sin\varphi+\vec{j}.\cos\varphi\\\vec{u}_z&=\vec{k}\end{aligned}\right|\Rightarrow\vec{V}=V_r\left(\vec{i}.\cos\varphi+\vec{j}.\sin\varphi\right)+V_\varphi\left(-\vec{i}.\sin\varphi+\vec{j}.\cos\varphi\right)+V_z\vec{k}$$

Organisée elle devient:

$$\vec{V}=\vec{i}\left(\underbrace{V_\rho\cos\varphi-V_\varphi\sin\varphi}_{X}\right)+\vec{j}\left(\underbrace{V_\rho\sin\varphi+V_\varphi\cos\varphi}_{Y}\right)+\underbrace{V_z}_{Z}\vec{k}$$

Par identification nous arrivons à:

$$X=V_r\cos\varphi-V_\varphi\sin\varphi$$
$$Y=V_r\sin\varphi+V_\varphi\cos\varphi$$
$$Z=V_z$$

Le résultat final est: $\boxed{\vec{V}=\vec{i}\left(V_r\cos\varphi-V_\varphi\sin\varphi\right)+\vec{j}\left(V_r\sin\varphi+V_\varphi\cos\varphi\right)+\vec{k}V_z}$

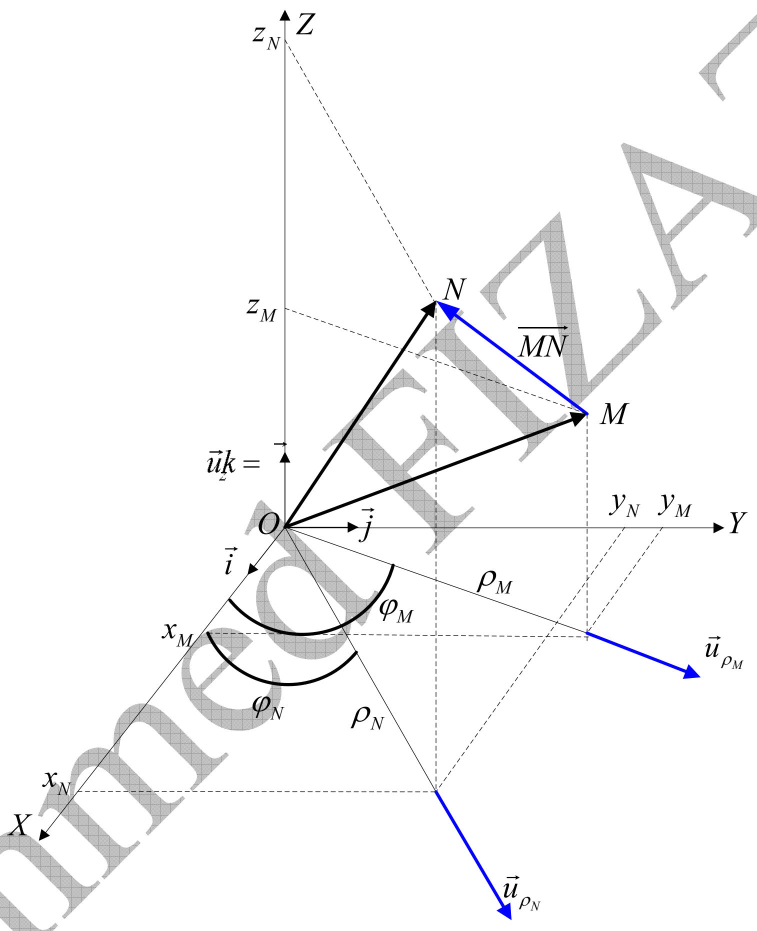
Exercice 3.7:

1/ Première méthode : Trouver la distance entre les deux points $M(\rho_M, \varphi_M, z_M)$ et $N(\rho_N, \varphi_N, z_N)$ en transformant l'expression du vecteur $\overrightarrow{MN}$ en coordonnées cartésiennes.

La figure montre que la distance entre les points M et N est égale au module du vecteur $\overrightarrow{MN}$:

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = \left(\rho_N \vec{u}_{\rho_N} + z_N \vec{u}_z\right) - \left(\rho_M \vec{u}_{\rho_M} + z_M \vec{u}_z\right)$$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = \left(\rho_N \vec{u}_{\rho_N} - \rho_M \vec{u}_{\rho_M}\right) + \left(z_N \vec{u}_z - z_M \vec{u}_z\right) \rightarrow (1)$$



Expressions des vecteurs unitaires $\vec{u}_{\rho_N}, \vec{u}_{\rho_M}$ et $\vec{u}_z$:

$$\vec{u}_{\rho_N} = \vec{i}.\cos\varphi_N + \vec{j}.\sin\varphi_N$$

$$\vec{u}_{\rho_M} = \vec{i}.\cos\varphi_M + \vec{j}.\sin\varphi_M$$

$$\vec{u}_z = \vec{k}$$

Remplaçons $\vec{u}_{\rho_N}, \vec{u}_{\rho_M}$ dans l'équation (1) :

$$\overrightarrow{MN} = \rho_N \left(\vec{i}.\cos\varphi_N + \vec{j}.\sin\varphi_N\right) - \rho_M \left(\vec{i}.\cos\varphi_M + \vec{j}.\sin\varphi_M\right) + \left(z_N \vec{u}_z - z_M \vec{u}_z\right)$$

Nous organisons l'équation pour qu'elle devienne :

$$\overrightarrow{MN} = \left(\rho_N \cos\varphi_N - \rho_M \cos\varphi_M\right)\vec{i} + \left(\rho_N \sin\varphi_N - \rho_M \sin\varphi_M\right)\vec{j} + \left(z_N - z_M\right)\vec{k}$$

La distance entre les points M et N est égale à la norme du vecteur $\overrightarrow{MN}$:

$$\left\|\overrightarrow{MN}\right\| = \sqrt{\left(\rho_N \cos\varphi_N - \rho_M \cos\varphi_M\right)^2 + \left(\rho_N \sin\varphi_N - \rho_M \sin\varphi_M\right)^2 + \left(z_N - z_M\right)^2}$$

Après calculs nécessaires on trouve :

$$\boxed{\left\|\overrightarrow{MN}\right\| = \sqrt{\rho_N^{\ 2} + \rho_M^{\ 2} - \left[2\rho_N.\rho_M\left(\cos\varphi_N.\cos\varphi_M - \sin\varphi_N.\sin\varphi_M\right)\right] + \left(z_N - z_M\right)^2}} \rightarrow (2)$$

2/ Deuxième méthode ::trouver la distance entre les points $M\left(\rho_M, \varphi_M, z_M\right)$ et $N\left(\rho_N, \varphi_N, z_N\right)$ par le calcul direct:

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = \left(\rho_N \vec{u}_{\rho_N} + z_N \vec{u}_z\right) - \left(\rho_M \vec{u}_{\rho_M} + z_M \vec{u}_z\right)$$

$$\overrightarrow{MN} = \left(\rho_N \vec{u}_{\rho_N} - \rho_M \vec{u}_{\rho_M}\right) + \left(z_N - z_M\right)\vec{u}_z$$

$$\left\|\overrightarrow{MN}\right\| = \sqrt{\rho_N^{\ 2} + \rho_M^{\ 2} - 2\rho_N.\rho_M \cos(\vec{u}_{\rho_N}, \vec{u}_{\rho_M}) + \left(z_N - z_M\right)^2}$$

D'après la figure, nous voyons que l'angle compris entre les deux vecteurs unitaires $\vec{u}_{\rho_N}, \vec{u}_{\rho_M}$ est égal à $\varphi_N - \varphi_M$. Nous obtenons donc:

$$\boxed{\left\|\overrightarrow{MN}\right\| = \sqrt{\rho_N^{\ 2} + \rho_M^{\ 2} - 2\rho_N.\rho_M \cos(\varphi_N - \varphi_M) + \left(z_N - z_M\right)^2}} \rightarrow (3)$$

Pour vérifier que les deux résultats (2) et (3) sont compatibles, il suffit de procéder à une transformation trigonométrique adéquate de l'équation (2) :

$$\cos\varphi_N.\cos\varphi_M - \sin\varphi_N.\sin\varphi_M = \cos\left(\varphi_N - \varphi_M\right) = \cos\left(\varphi_M - \varphi_N\right)$$

EXERCICES

تــمــاريــن

Exercice 3.1 Convertir le vecteur suivant des coordonnées cartésiennes $(\vec{i},\vec{j})$ en coordonnées polaires $(\vec{u}_r,\vec{u}_\varphi)$: $\vec{V}=X\vec{i}+Y\vec{j}$	**التمرين 1.3** حوّل عبارة الشعاع التالي من الإحداثيات الكارتيزية $(\vec{i},\vec{j})$ إلى جملة الإحداثيات القطبية $(\vec{u}_r,\vec{u}_\varphi)$: $\vec{V}=X\vec{i}+Y\vec{j}$
Exercice 3.2 Convertir le vecteur suivant des coordonnées sphériques $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_\varphi)$ en coordonnées cartésiennes: $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ $\vec{V}=V_r\vec{u}_r+V_\theta\vec{u}_\theta+V_\varphi\vec{u}_\varphi$	**التمرين 2.3** حوّل عبارة الشعاع التالي من الإحداثيات الكروية $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_\varphi)$إلى جملة الإحداثيات الكارتيزية $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$: $\vec{V}=V_r\vec{u}_r+V_\theta\vec{u}_\theta+V_\varphi\vec{u}_\varphi$
Exercice 3.3 Convertir le vecteur suivant des coordonnées cartésiennes $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ en coordonnées cylindriques $(\vec{u}_\rho,\vec{u}_\varphi,\vec{u}_z)$: $\vec{V}=X\vec{i}+Y\vec{i}+Z\vec{i}$	**تمرين 3.3** حوّل عبارة الشعاع التالي من الإحداثيات الكارتيزية $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$إلى جملة الإحداثيات الأسطوانية $(\vec{u}_\rho,\vec{u}_\varphi,\vec{u}_z)$: $\vec{V}=X\vec{i}+Y\vec{i}+Z\vec{i}$
Exercice 3.4 Convertir le vecteur suivant des coordonnées cartésiennes $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ en coordonnées sphériques $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_\varphi)$: $\vec{V}=X\vec{i}+Y\vec{j}+Z\vec{k}$	**التمرين 34.:** حوّل عبارة الشعاع التالي من الإحداثيات الكارتيزية $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ إلى جملة الإحداثيات الكروية $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_\varphi)$: $\vec{V}=X\vec{i}+Y\vec{j}+Z\vec{k}$
Exercice 3.5 Convertir le vecteur suivant en coordonnées sphériques $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_\varphi)$: $\vec{A}=\rho^2.\vec{u}_\rho+\cos\varphi.\vec{u}_\varphi$	**التمرين 5.3** حوّل عبارة الشعاع التالي إلى الإحداثيات الكروية $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_\varphi)$: $\vec{A}=\rho^2.\vec{u}_\rho+\cos\varphi.\vec{u}_\varphi$
Exercice 3.6 Convertir le vecteur suivant des coordonnées cylindriques $(\vec{u}_\rho,\vec{u}_\varphi,\vec{u}_z)$ en coordonnées cartésiennes $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$: $\vec{V}=V_\rho\vec{u}_\rho+V_\varphi\vec{u}_\varphi+V_z\vec{u}_z$	**تمرين6.3** حوّل عبارة الشعاع التالي من الإحداثيات الأسطوانية $(\vec{u}_\rho,\vec{u}_\varphi,\vec{u}_z)$إلى جملة الإحداثيات الكارتيزية $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$: $\vec{V}=V_\rho\vec{u}_\rho+V_\varphi\vec{u}_\varphi+V_z\vec{u}_z$

Exercice 3.7

Trouver la distance entre les deux points $M\left(\rho_M,\varphi_M,z_M\right)$ et $N\left(\rho_N,\varphi_N,z_N\right)$ par les deux méthodes :

1/ en convertissant l'expression du vecteur $\overrightarrow{MN}$ en coordonnées cartésiennes.

2/ par le calcul direct.

Montrer que la distance entre les points M et N s'écrit :

$$\left\|\overrightarrow{MN}\right\| = \sqrt{\rho_N^2+\rho_M^2+\left(z_N-z_M\right)^2-2\rho_N.\rho_M.\cos\left(\varphi_M-\varphi_N\right)}$$

التمرين 7.3:

جد عبارة المسافة بين نقطتين $M\left(\rho_M,\varphi_M,z_M\right)$ و $N\left(\rho_N,\varphi_N,z_N\right)$ و ذلك بالطريقتين المختلفتين:

1/ بتحويل عبارة الشعاع $\overrightarrow{MN}$ إلى الإحداثيات الكارتيزية،

2/ بالحساب المباشر. بين أن المسافة بين النقطتين M و N تكتب بالشكل التالي:

$$\left\|\overrightarrow{MN}\right\| = \sqrt{\rho_N^2+\rho_M^2+\left(z_N-z_M\right)^2-2\rho_N.\rho_M.\cos\left(\varphi_M-\varphi_N\right)}$$

Corrigés des exercices de 6.1 à 6.15 — حلول التمارين من 1.6 إلى 15.6

Exercice 6.1:

1/

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{\partial F_x}{\partial y}=\dfrac{\partial F_y}{\partial x}\Rightarrow \boxed{\beta=2}\\[2mm]
\dfrac{\partial F_x}{\partial z}=\dfrac{\partial F_z}{\partial x}\Rightarrow \boxed{\gamma=-1}\\[2mm]
\dfrac{\partial F_y}{\partial z}=\dfrac{\partial F_z}{\partial y}\Rightarrow \boxed{\alpha=4}
\end{array}\right|\Rightarrow \vec{F}=\left(x+2y+4z\right)\vec{i}+\left(2x-3y-z\right)\vec{j}+\left(4x-y+2z\right)\vec{k}$$

2/ $\vec{F}=-\overrightarrow{grad}E_p\left(x,y,z\right)$

$$-\frac{\partial E_p}{\partial x}=F_x\Rightarrow -E_p=\frac{1}{2}x^2+2xy+4xz+f\left(y,z\right)$$

$$-\frac{\partial E_p}{\partial y}=F_y\Rightarrow 2x+\frac{\partial f\left(y,z\right)}{\partial y}=2x-3y-z\Rightarrow f\left(x,y\right)=-\frac{3}{2}y^2-yz+g\left(z\right)$$

$$-E_p=\frac{1}{2}x^2+2xy+4xz-\frac{3}{2}y^2-yz+g\left(z\right)$$

$$-\frac{\partial E_p}{\partial z}=F_z\Rightarrow 4x-y+\frac{\partial g\left(z\right)}{\partial z}=4x-y+2z\Rightarrow\frac{\partial g\left(z\right)}{\partial z}=2z$$

$$g\left(z\right)=z^2+C^{te}$$

$$E_p=-\frac{1}{2}x^2-2xy-4xz+\frac{3}{2}y^2+yz-z^2+C^{te}$$

$$E_p\left(0,0,0\right)=2\Rightarrow C^{te}=2$$

$$\boxed{E_p=-\frac{1}{2}x^2-2xy-4xz+\frac{3}{2}y^2+yz-z^2+2}$$

Exercice 6.2:

1/ Pour que la force $\vec{F}$ dérive d'un potentiel, il est impérative que l'équation $\overrightarrow{rot}\vec{F}=\vec{0}$ soit vérifiée.

$$F_x=X\left(x,z\right)\ ,\ F_y=yz\ ,\ F_z=x^2+\frac{1}{2}y^2$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial y}=\frac{\partial F_y}{\partial x}\Rightarrow\frac{\partial F_x}{\partial y}=0\Rightarrow F_x=C^{te}\rightarrow\left(1\right)$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial z}=\frac{\partial F_z}{\partial x}\Rightarrow\frac{\partial F_x}{\partial z}=2x\Rightarrow F_x=2xy+C^{te}\rightarrow\left(2\right)$$

$$\boxed{F_x=X\left(x,z\right)=2xz}$$

$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}E_p$: $\boxed{E_p = -x^2z - \frac{1}{2}y^2z}$

2/ Calcul du travail par deux méthodes.

Première méthode:

$$dW = -dE_p \ , \ dW = \vec{F}.\vec{dl} \ , \ W = \int_L \vec{F}.\vec{dl} = E_p(B) - E_p(A)$$

$$\boxed{W = E_p(B) - E_p(A) = h\pi R^2}$$

Deuxième méthode:

$$W = \int_A^B \left[F_x dx + F_y dy + F_z dz \right]$$

$$\boxed{W = R^2 h\pi}$$

Les deux résultats sont identiques.

3/ La force étant conservatrice, le travail est le même quelque soit le chemin suivi.

Exercice 6.3:

Quelque soit le chemin suivi le travail de la force est $W = \int \vec{F}d\vec{r}$

a/ Le travail de la force $\vec{F}$ suivant le chemin rectiligne.

Rappel mathématique: Pour trouver l'équation d'une droite passant par les deux points $P(x_P, y_P, z_P)$ et $Q(x_Q, y_Q, z_Q)$, on doit poser les équations suivantes:

$$\frac{x - x_P}{x_Q - x_P} = \frac{y - y_P}{y_Q - y_P} = \frac{z - z_P}{z_Q - z_P}$$

Puis en déduire l'équation de la trajectoire:

$$\frac{x-1}{2-1} = \frac{y-2}{4-2} = \frac{z+1}{-1} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} y = 2x \\ z = -x \\ z = -\frac{1}{2}y + 1 \end{array} \right.$$

$$\boxed{W = \frac{7}{3} = 2,33J}$$

b/ Le travail de la force $\vec{F}$ suivant la courbe brisée $ABCD$.

Dans ce cas, on divise le travail total W_{AD} en trois travaux W_{BC}, W_{AB} et W_{CD} effectués suivant les segments BC, AB et CD.

$$W_{AD} = W_{AB} + W_{BC} W_{CD} \Rightarrow \boxed{W_{AD} = -5,67J}$$

c/ $\boxed{W \approx 21,1J}$

Exercice 6.4:

a/ $\frac{dE_p}{dr} = \frac{k}{r^2}$. ; $E_p = \int \frac{k}{r^2} dr \Rightarrow E_p = -\frac{k}{r} + C^{te}$

$$\boxed{E_p = -\frac{k}{r}}$$

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2}\frac{k}{r}}$$

$$E = \frac{1}{2}\frac{k}{r} - \frac{k}{r} \Rightarrow \boxed{E = -\frac{1}{2}\frac{k}{r}}$$

b/ $$E_c = \frac{1}{2}\frac{k}{r} = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{k}{mr}}}$$

c/

$$\vec{L}_O = \vec{r} \wedge m\vec{v} \Rightarrow \boxed{\vec{L}_O = mr^2\dot{\theta}\vec{u}_z}$$

$$L_O = mr^2\dot{\theta} \Rightarrow L_O = mr^2\frac{1}{r}\sqrt{\frac{k}{mr}} \Rightarrow \boxed{L_O = \sqrt{mkr}}$$

Exercice 6.5:

a/

$$W = \int\left(F_x dx + F_y dy + \underbrace{F_z dz}_{0}\right) \Rightarrow \boxed{W = \int_0^{-3} F_x dx + \int_0^{4} F_y dy} \;;\; \boxed{W = 45J}$$

b/ $$\boxed{P_{moy} = \frac{W}{t}} \;,\; \boxed{P_{moy} = 75W}$$

c/

$$\Delta E_c = \sum W_i \Rightarrow \boxed{\Delta E_c = 45J}$$

d/

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{2\Delta E_c}{m}}} \;,\; \boxed{v = 9,48ms^{-1}}$$

e/

$$\boxed{\Delta E_p = -W} \Rightarrow \boxed{\Delta E_p = -45J}$$

D'après les résultats obtenus on remarque que $\boxed{\Delta E_p = -\Delta Ec}$, on explique cela comme suit:

La particule quitte l'origine sans vitesse initiale, c'est-à-dire qu'elle n'avait initialement aucune énergie cinétique, mais par contre elle possédait une énergie potentielle. En arrivant au point A avec la vitesse calculée précédemment elle a acquit donc une énergie cinétique exactement égale à l'énergie potentielle qui a été totalement dépensée. Au point A l'énergie potentielle est nulle $\left(E_{p,A} = 0\right)$.

Calculons le travail fourni par la force lors de son déplacement de A à B :

$$dW_{AB} = \vec{F}\,\overrightarrow{dr}$$

$$W_{AB} = \int\left(F_x dx + F_y dy\right) \Rightarrow \boxed{W_{AB} = \int_{-3}^{7} F_x dx + \int_4^{16} F_y dy}$$

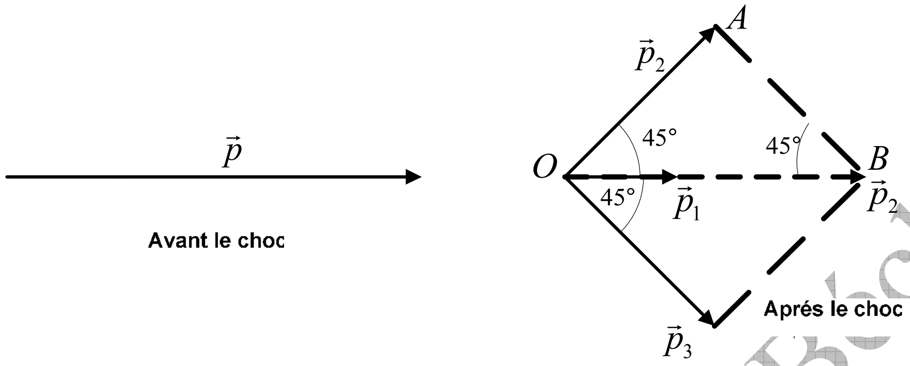
$$W_{AB} = \int_{-3}^{7} -7dx + \int_4^{16} 6dy = -28 + 72 \Rightarrow \boxed{W_{AB} = 44J}$$

On peut calculer à présent l'énergie potentielle $E_{p,B}$ au point B :

$$E_{P,A} - E_{p,B} = -W_{AB} \Rightarrow E_{p,B} = 44 \quad , \quad \boxed{E_{p,B} = 44J}$$

Exercice 6.6:

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 \Rightarrow M\vec{v} = m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2 + m\vec{v}_3$$



$$\vec{R} = \vec{p}_2 + \vec{p}_3 \Rightarrow R = \sqrt{p_2^2 + p_3^2} \Rightarrow \boxed{R = mv_2\sqrt{2}}$$

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \underbrace{\vec{p}_2 + \vec{p}_3}_{\vec{R}} \Rightarrow p = p_1 + R \Rightarrow Mv = mv_1 + mv_2\sqrt{2}$$

$$M = 3m \Rightarrow v = v_1 + v_2\sqrt{2} \Rightarrow \boxed{v_2 = \frac{3v - v_1}{\sqrt{2}}}$$

$$\boxed{v_2 = v_3 = 11,3ms^{-1}}$$

Exercice 6.7:

1/

$$\boxed{v = \frac{2mv_0}{M+m}} \quad , \quad \boxed{v = 0,33ms^{-1}}$$

$$\boxed{x_0 = v\sqrt{\frac{M}{k}}} \quad , \quad \boxed{x_0 = 2,33cm}$$

2/

$$p_1^{'} = p_2^{'} \quad , \quad mv_0 = \left(M + m\right)v^{'} \Rightarrow \boxed{v^{'} = \frac{mv_0}{M+m}} \quad \boxed{v' = 0,17ms^{-1}}$$

3/

$$E_c = E_p \quad , \quad \frac{1}{2}\left(M+m\right)v'^2 = \frac{1}{2}kx_0'^2 \Rightarrow \boxed{x_0^{'} = v^{'}\sqrt{\frac{M+m}{k}} = \frac{mv_0}{\sqrt{k\left(m+M\right)}}} \quad ,$$

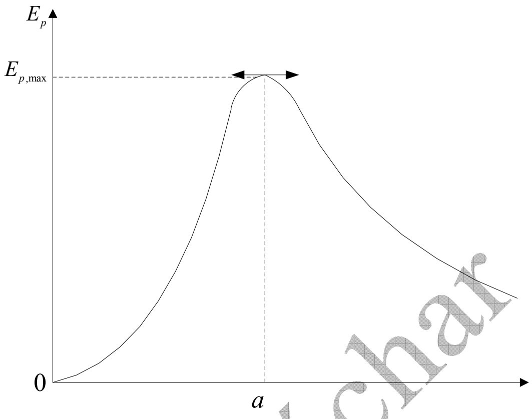
$$\boxed{x_0^{'} = 2,33cm}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta E_c = \sum W \\ \Delta E_c = \Delta E_p \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{W = \frac{1}{2}kx_0'^2} \quad , \quad \boxed{W = 2,17J}$$

Exercice 6.8:

1/ Le graphe ci-dessous représente les variations de l'énergie potentielle en fonction de la distance .

	0		a		$+\infty$
$\frac{dE_p}{dr}=2Kr\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)e^{-r^2/a^2}$		+	0	−	
$\frac{d^2E_p}{dr^2}$		+	−	+	
$\left(\frac{d^2E_p}{dr^2}\right)\left(\frac{dE_p}{dr}\right)$		+		−	
$E_p(r)$		↗	0	↘	



2/ L'énergie potentielle atteint sa valeur maximale quand sa première dérivée par rapport à s'annule:

$$\frac{dE_p}{dt}=2Kr\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)e^{-r^2/a^2}=0\Rightarrow r=a$$

$$r=a\Rightarrow\boxed{E_{p,\max}=Ka^2e^{-1}}$$

3/ Les positions d'équilibre correspondent à l'annulation de la dérivée première $\frac{dE_p}{dt}=0$, où $r\in\left]-\infty,+\infty\right[$.

$$\frac{dE_p}{dt}=2Kr\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)e^{-r^2/a^2}=0\Rightarrow\boxed{r=\{0,\pm a,\pm\infty\}}$$

4/ Les positions d'équilibre stable correspondent aux positions pour lesquelles $\frac{d^2E_p}{dt^2}\succ 0$, et $\frac{dE_p}{dt}=0$, de là et d'après l'énoncé on obtient:

$$\frac{d^2E_p}{dt^2}=2K\left(1-5\frac{r^2}{a^2}+2\frac{r^4}{a^2}\right)e^{-\frac{r^2}{a^2}}\succ 0\Rightarrow\boxed{r=\{0,\pm\infty\}}$$

5/ L'expression de la force $\vec{F}(M)$ nous la déduisons de la formule $\vec{F}(M)=-\vec{\nabla}E_p$:

$$\vec{F}(M)=-\vec{\nabla}E_p\Rightarrow\vec{F}(M)=-\frac{dE_p}{dt}\vec{u}$$

$$\boxed{\vec{F}(M)=-2Kr\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)e^{-r^2/a^2}.\vec{u}_r}$$

Exercice 6.9:

1/ $\boxed{v_B=\sqrt{2gH}}$

2/ $\boxed{h=r\left(1-\cos\theta\right)}$

3/ $$\boxed{v_C = \sqrt{-2gh + v_B^2}}$$

4/

$$\boxed{R = 3mg\cos\theta - 2mg + \frac{m}{r}v_B^2}$$

5/ $$\boxed{v_{B,\min} = \sqrt{4gr}}$$

6/ $$\boxed{R_S = -mg}$$

Quand la particule se déplace entre les points cités plus haut le signe de la réaction change du positif au négatif. Cela prouve l'inversion du sens de la réaction au point I (On comprend de cela que la réaction s'annule au point I). Le point où s'annule la réaction est défini par l'angle θ_I que nous voulons déterminer :

$$\cos\theta_I = -\frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{\theta_I \approx 132°}$$

7/ $$R \geq 0 \Rightarrow \boxed{v_{B,0} \geq \sqrt{5rg}} \; ; \; \boxed{H \geq \frac{5}{2}r}$$

Exercice 6.10:

Première collision:

$$\boxed{v_2 = \frac{2m_1 v_1}{m_1 + m_2}}$$

Deuxième collision:

$$\boxed{v_3 = \frac{2m_2 v_2}{m_2 + m_3}}$$

$$\boxed{v_3 = \frac{4m_1 m_2 v_1}{(m_1 + m_2)(m_2 + m_3)}}$$

Pour simplifier posons $m_2 = x$, $v_3 = y$ et écrivons :

$$\boxed{y = \frac{4m_1 v_1 x}{(m_1 + x)(x + m_3)}}$$

Dérivons l'équation $y = f(x)$ pour obtenir:

$$\frac{dy}{dx} = 4m_1 v_1 \frac{m_1 m_3 - x^2}{(m_1 + x)^2 (x + m_3)^2}$$

y atteint sa valeur maximale quand $\frac{dy}{dx} = 0$, d'où :

$$\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow m_1 m_3 - x^2 = 0 \Rightarrow \boxed{x = m_2 = \sqrt{m_1 m_3}}$$

La valeur obtenue est celle de la masse m_2 pour que la bille m_3 acquière une vitesse maximale $v_{,\max}$ après que la bille m_2 l'ait percutée. Quant à l'expression de la vitesse maximale on l'obtient en remplaçant m_2 dans l'équation$\left(9\right)$:

$$\boxed{v_{,\max} = \frac{4m_1\sqrt{m_1 m_3}\,v_1}{\left(m_1 + \sqrt{m_1 m_3}\right)\left(\sqrt{m_1 m_3} + m_3\right)}}$$

Exercice 6.11:

1/ $\boxed{f = \mu mg\cos\alpha}$, $\boxed{f = 4{,}9N}$

2/

$$\boxed{v_B = \sqrt{2a\left(g\sin\alpha - \frac{f}{m}\right)}} \;,\; \boxed{v_B = 3{,}88 m.s^{-1}}$$

$$\boxed{v = \left[g\left(2a - l_0\right)\sin\alpha + \frac{1}{2}v_B^2\right]^{1/2}} \;,\; \boxed{v \approx 4{,}6 m.s^{-1}}$$

3/ $$\Delta E_c = \Delta E_p \;,\; \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow \boxed{x = v\sqrt{\frac{m}{k}}} \;,\; \boxed{x = 14{,}5cm}$$

4/ $$\Delta E_p = \Delta E_c \;,\; \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow \boxed{v = x\sqrt{\frac{k}{m}}} \;,\; \boxed{v = 4{,}58ms^{1}}$$

$$0 - \frac{1}{2}mv^2 = -mgd\sin\alpha \Rightarrow \boxed{d = \frac{v^2}{2g\sin\alpha}} \;,\; \boxed{d \approx 1{,}23m}$$

Exercice 6.12:

1/ On considère le plan horizontal passant par le centre de la sphère comme référentiel de l'énergie potentielle$\left(E_{p,O} = 0\right)$.

$$\boxed{\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2g}{R}\left(\cos\alpha - \cos\theta\right)}}$$

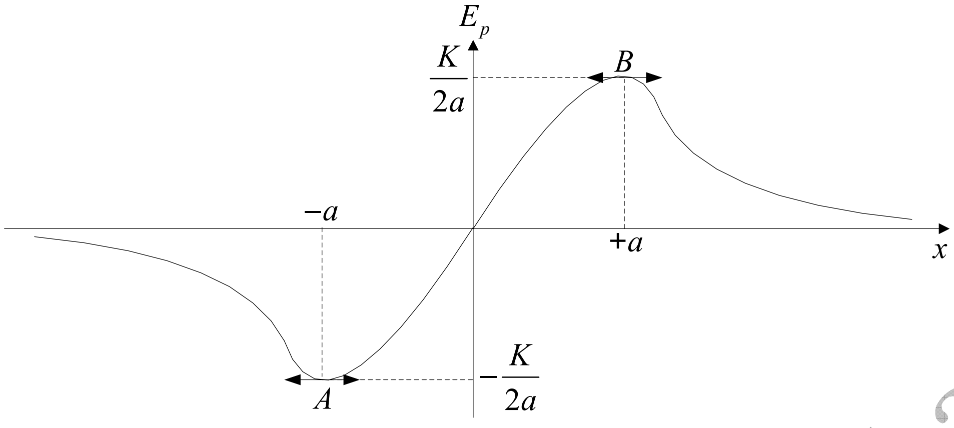
2/ $$\boxed{N = mg\left(3\cos\theta - 2\cos\alpha\right)}$$

3/ $$N = 0 \Rightarrow \cos\theta_0 = \frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{\theta_0 \approx 48°}$$

Discussion: L'angle sous lequel le point matériel quitte la sphère est indépendant du rayon et de la masse de la sphère. Cependant ce résultat change en présence d'une vitesse initiale ou de frottement à la surface.

Exercice 6.13:

1/ L'allure générale de la courbe est la suivante:



2/ Les positions d'équilibre stable sont caractérisées par les deux conditions:

$$\frac{dE_p}{dx} = 0 \ , \ \left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x_0} \succ 0$$

Les positions d'équilibre instable sont caractérisées par les deux conditions:

$$\frac{dE_p}{dx} = 0 \ , \ \left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x_0} \prec 0$$

En dérivant E_p par rapport à x deux fois de suite, on obtient:

$$\frac{dE_p}{dx} = K\frac{a^2 - x^2}{\left(x^2 + a^2\right)^2} = 0 \Leftrightarrow x = \pm a$$

$$\frac{d^2E_p}{dx^2} = 2Kx\frac{\left(x^2 - 3a^2\right)}{\left(x^2 + a^2\right)^3} \Rightarrow \left\| \begin{array}{l} \left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x=+a} \prec 0 \\ \left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x=-a} \succ 0 \end{array} \right.$$

Nous remarquons que la position d'équilibre stable est (A) d'abscisse $x = -a$, mais la position d'équilibre instable est (B) d'abscisse $x = +a$.

Exercice 6.14:

1.a/

$$\boxed{\overrightarrow{O'P} = a\left(1 + \cos\theta\right).\vec{u}_r - a\sin\theta.\vec{u}_\theta}$$

$$\boxed{\left\|\overrightarrow{O'P}\right\| = 2a\cos\frac{\theta}{2}}$$

b/

$$\boxed{\vec{T} = -k\left[\left(2a\cos\frac{\theta}{2} - l_0\right)\left(\cos\frac{\theta}{2}\vec{u}_r - \sin\frac{\theta}{2}\vec{u}_\theta\right)\right]}$$

2.a/ $$\vec{v} = \underbrace{\dot{a}\vec{u}_r}_{\vec{0}} + a\dot{\theta}\vec{u}_\theta \Rightarrow \boxed{\vec{v} = a\dot{\theta}\vec{u}_\theta}$$

b/ $$\boxed{\wp = a\dot{\theta}\left[\left(ka - mg\right)\sin\theta - kl_0 \sin\frac{\theta}{2}\right]}$$

c/

$$\boxed{E_p = a\left[\left(ka - mg\right)\cos\theta - 2kl_0 \cos\frac{\theta}{2}\right] + C^{te}}$$

3.a/ $$\boxed{E_p = mga\left[\cos\theta - 2\sqrt{3}\cos\frac{\theta}{2}\right]}$$

$$\boxed{\frac{dE_p}{d\theta} = mga\sin\frac{\theta}{2}\left[\sqrt{3} - 2\cos\frac{\theta}{2}\right]}$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{dE_p}{d\theta} = 0 \\ 0 \le \theta \le \pi/2\end{array}\right| \Rightarrow \left|\begin{array}{l}\boxed{\theta_1 = 0} \\ \boxed{\theta_2 = \pi/3}\end{array}\right.$$

b/

$$\boxed{\frac{d^2E_p}{d\theta} = mga\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\theta}{2} - 1\right)}$$

$$\frac{d^2E_p}{d\theta}\left(\theta_1 = 0\right) = mga\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right) \prec 0 \ \text{ Equilibre instable}$$

$$\frac{d^2E_p}{d\theta}\left(\theta_2 = \pi/3\right) = \frac{mga}{2} \succ 0 \ \text{ Equilibre stable}$$

Exercice 6.15:

1/

$$\boxed{v_0 = \sqrt{2gl\left(1 - \cos\alpha_0\right)}}$$

a/ **Cas du choc élastique:**

$$\boxed{v_1 = \frac{x-1}{x+1}\sqrt{2gl\left(1 - \cos\alpha_0\right)}}$$

$$\boxed{v_2 = \frac{2x}{x+1}\sqrt{2gl\left(1 - \cos\alpha_0\right)}}$$

$$\boxed{\cos\alpha_1 = 1 - \left[\frac{x-1}{x+1}\right]^2\left(1 - \cos\alpha_0\right)}$$

$$\boxed{\cos\alpha_2 = 1 - \left[\frac{2x}{x+1}\right]^2\left(1 - \cos\alpha_0\right)}$$

Discussion:

$x \succ 1 \Rightarrow \begin{vmatrix} v_1 \succ 0 \\ v_2 \succ 0 \end{vmatrix}$: Les deux billes remontent dans le même sens après le choc telle que la vitesse de A_1 soit plus petite que la vitesse de A_2 .

$x = 1 \Rightarrow \begin{vmatrix} v_1 = 0 \\ v_2 = v_0 \end{vmatrix}$: La bille A_1 s'arrête après le choc en transférant toute son énergie à la bille A_2 qui s'élance avec la vitesse v_0 .

$x \prec 1 \Rightarrow \begin{vmatrix} v_1 \prec 0 \\ v_2 \prec 0 \end{vmatrix}$: Les deux billes remontent en sens contraires de telle façon que la bille A_1 revient sur son chemin et la bille A_2 se déplace dans le sens contraire.

b/ **Cas du choc mou:**

$$\boxed{\cos\alpha = 1 - \left[\frac{x}{x-1}\right]^2 \left(1 - \cos\alpha_0\right)}$$

2/ Application numérique:

a/ : $\boxed{x = x_2 = 1/3}$, $\cos\alpha' = 0,875 \Rightarrow \boxed{\alpha' = 29°}$

b/

Dans le cas du choc élastique:

$$\cos\alpha_{1_{x=2}} = 0,94 \Rightarrow \boxed{\alpha_{1_{x=2}} \approx 20°}$$

Dans le cas du choc mou:

$$\cos\alpha_{2_{x=2}} = 0,11 \Leftrightarrow \boxed{\alpha_{2_{x=2}} = 83,7°}$$

EXERCICES

تــمــاريــن

Exercice 6.1

Une particule est soumise à une force définie par ses coordonnées cartésiennes :

$$\vec{F} = (x + 2y + \alpha z)\vec{i} + (\beta x - 3y - z)\vec{j} + (4x + \gamma y + 2z)\vec{k}$$

Où α, β, γ sont des constantes. x, y, z sont en mètre et $\vec{F}$ en newton.

1/ Trouver les valeurs de α, β, γ pour que $\vec{F}$ dérive d'un potentiel.

2/ Trouver l'expression du potentiel $E_p(x, y, z)$ dont dérive la force sachant que $E_p(0,0,0) = 2$.

تمرين 1.6

تخضع جسيمة لحقل قوة معرفة بالإحداثيات الكارتيزية:

$$\vec{F} = (x + 2y + \alpha z)\vec{i} + (\beta x - 3y - z)\vec{j} + (4x + \gamma y + 2z)\vec{k}$$

حيث α, β, γ ثوابت، x, y, z بالمتر، Fبالنيوتن.

1/ أوجد قيم α, β, γ حتى تكون $\vec{F}$ مشتقة من كمون.

2/ أوجد عبارة الكمون $E_p(x, y, z)$ الذي تشتق منه القوة $\vec{F}$ علما أن $E_p(0,0,0) = 2$.

Exercice 6.2

On considère dans un repère cartésien un champ de forces $\vec{F}$ d'expression :

$$\vec{F} = X(x,z)\vec{i} + yz\vec{j} + \left(x^2 + \frac{1}{2}y^2\right)\vec{k}$$

1. Déterminer $X(x,z)$ pour que $\vec{F}$ dérive d'une énergie potentielle E_p que l'on calculera, sachant que la force est nulle en O. On prendra le plan Oxy comme origine des énergies potentielles.

2. Calculer alors, par deux méthodes différentes le long de l'hélice d'équations paramétriques $x = R\cos\theta$, $y = R\sin\theta$, $z = h\theta$, le travail de $\vec{F}$ du point $A(\theta = 0)$ au point $B(\theta = \pi)$.

3. Obtiendrait-on un résultat différent en calculant le travail le long d'une autre courbe ?

تمرين 2.6

نعتبر في معلم ديكارتي حقلا للقوى $\vec{F}$ عبارتها:

$$\vec{F} = X(x,z)\vec{i} + yz\vec{j} + \left(x^2 + \frac{1}{2}y^2\right)\vec{k}$$

1/ عيّن $X(x,z)$ لكي تشتق $\vec{F}$ من طاقة كامنة E_p و التي نحسبها، علما أن القوة معدومة في O. نتخذ المستوى Oxy كمبدإ للطاقات الكامنة.

2/ أحسب بطريقتين مختلفتين، على طول الحلزون ذي المعادلات الوسيطية:

$$x = R\cos\theta \ , \ y = R\sin\theta \ , \ z = h\theta$$

عمل القوة $\vec{F}$ من النقطة $A(\theta = 0)$ إلى النقطة $B(\theta = \pi)$.

3/ هل نحصل على نتيجة مختلفة بحسابنا العمل على طول منحنى آخر؟

Exercice 6.3

Une particule matérielle de masse m se déplace sous l'action de la force:

$$\vec{F} = (x^2 + y^2)\vec{u}_x + xz\vec{u}_y + xy\vec{u}_z$$

Du point $A(1,2,-1)$ au point $D(2,4,-2)$.

Calculer le travail de la force $\vec{F}$ suivant chacun des trajets suivants:

a/ la droite AD,

b/ la ligne brisée $ABCD$ où $B(2,2,-1)$ et $C(2,4,-1)$,

d/ la courbe définie par les équations paramétriques :

تمرين 3.6

تنتقل جسيمة مادية كتلتها m تحت تأثير القوة:

$$\vec{F} = (x^2 + y^2)\vec{u}_x + xz\vec{u}_y + xy\vec{u}_z$$

من النقطة $A(1,2,-1)$ إلى النقطة $D(2,4,-2)$.

أحسب عمل القوة $\vec{F}$ وفق كل مسلك من المسالك التالية:

ا/ المستقيم AD ،

ب/ الخط المنكسر $ABCD$ حيث $B(2,2,-1)$ و $C(2,4,-1)$

ج/ المنحنى المعرف بالمعادلات الوسيطية:

$x=t$, $y=t^2$, $z=t$, sachant que la particule quitte le point A à l'instant $t_A=0$ et atteint le point D à l'instant $t_D=2s$.	$x=t$, $y=t^2$, $z=t$ علما أن النقطة المادية انطلقت من A في اللحظة $t_A=0$ و تصل إلى النطة D في اللحظة $t_D=2s$.

Exercice 6.4 Une particule de masse m se déplace sous l'action d'une force attractive $\vec{F}=-\frac{k}{r^2}\vec{u}$. La trajectoire est un cercle de rayon . Montrer que : a/ l'énergie totale est $E=-\frac{k}{2}$, b/ la vitesse est $v=\sqrt{\frac{k}{m}}$, c/ le moment cinétique est $L=\sqrt{mkr}$.	**تمرين 4.6** تنتقل جسيمة كتلتها m تحت تأثير قوة جذب $\vec{F}=-\frac{k}{r^2}\vec{u}$. المسار هو دائرة نصف قطرها . برهن أن: ا/ الطاقة الكلية هي $E=-\frac{k}{2}$، ب/ السرعة هي $v=\sqrt{\frac{k}{m}}$، ج/ العزم الحركي هو $L=\sqrt{mkr}$.

Exercice 6.5 Une particule se déplace depuis l'origine O jusqu'au point A défini par $\vec{r}=-3\vec{u}_x+4\vec{u}_y+16\vec{u}_z$ sous l'action de la force $\vec{F}=-7\vec{u}_x+6\vec{u}_y$. Calculer : a/ le travail effectué. Est-il nécessaire de spécifier le chemin suivi par la particule ? justifier. b/ la puissance moyenne s'il faut $0,6s$ pour aller d'un endroit à un autre. c/ la variation de l'énergie cinétique sachant que la masse de la particule est $1kg$. d/ la vitesse finale si on considère la vitesse initiale nulle. e/ la différence d'énergie potentielle entre les deux points. Que remarquez-vous ? Déterminer l'énergie potentielle au point B défini par $\vec{r}\,'=7\vec{u}_x+16\vec{u}_y-42\vec{u}_z$.	**تمرين 5.6** تتحرك جسيمة انطلاقا من المبدإ O حتى النقطة A المعرفة بـــ $\vec{r}=-3\vec{u}_x+4\vec{u}_y+16\vec{u}_z$ تحت تأثير القوة $\vec{F}=-7\vec{u}_x+6\vec{u}_y$. أحسب: ا/ العمل المنجز. هل من اللازم توضيح المسلك المتبع؟ علل. ب/ الإستطاعة المتوسطة إذا كان الانتقال من مكان إلى آخر يتطلب $0,6s$. ج/ التغير في الطاقة الحركية علما أن كتلة الجسيمة هي $1kg$. د/ السرعة النهائية إذا اعتبرنا السرعة الابتدائية معدومة. ه/ التغير في الطاقة الكامنة بين النقطتين. ماذا تلاحظ؟ حدد الطاقة الكامنة في النقطة B المعرفة بـــ $\vec{r}\,'=7\vec{u}_x+16\vec{u}_y-42\vec{u}_z$.

Exercice 6.6

Une grenade lancée horizontalement avec la vitesse $v = 8ms^{-1}$, explose en trois fragments à masse égale.

Le premier fragment continue à se déplacer horizontalement à $v = 16ms^{-1}$, un autre est lancé vers le haut suivant un angle de $45°$ et le troisième est projeté suivant le même angle vers le bas.

Trouver la grandeur des vitesses des fragments deux et trois.

تمرين 6.6

ترمى قنبلة يدوية أفقيا بسرعة $v = 8ms^{-1}$ ، فتنفجر منشطرة إلى ثلاث شظايا متساوية الكتلة.

القطعة الأولى تواصل الانتقال أفقيا بسرعة $v = 16ms^{-1}$، القطعة الثانية تصعد إلى الأعلى تحت زاوية تصنع $45°$ مع الأفق، و القطعة الثالثة تتطاير تحت نفس الزاوية و لكن نحو الأسفل.

أحسب شدة كل من سرعتي الشظيتين الثانية و الثالثة.

Exercice 6.7

Une masse $M = 100g$ est attachée à l'extrémité d'un ressort disposé horizontalement, comme indiqué sur la figure ci-dessous, et dont la constante de raideur est $k = 20Nm^{-1}$. Une masse $m = 50g$ se déplaçant à la vitesse $v_0 = 0.5ms^1$ vient heurter la masse M initialement au repos. On suppose le système isolé.

1/ Calculer la vitesse v et le déplacement maximal x_0 de la masse M après le choc, en considérant le choc comme étant élastique, et en supposant que les vitesses de M et m sont parallèles après le choc.

2/ Calculer la vitesse v' du système $(M+m)$ et la compression maximale x_0' subie par le ressort dans le cas du choc mou.

3/ Calculer le travail dépensé pour la compression maximale du ressort toujours dans le cas du choc mou.

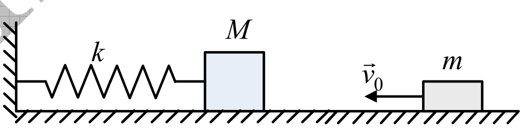
تمرين 7.6

تثبت كتلة $M = 100g$ في نهاية نابض ، ثابت مرونته $k = 20Nm^{-1}$ ، موضوع أفقيا (الشكل المرافق). تأتي كتلة $m = 50g$ بسرعة ثابتة $v_0 = 0.5ms^1$ لتصطدم بالكتلة M المتوقفة. نفترض الجملة معزولة.

1/ أحسب السرعة v و الانتقال الأعظمي x_0 للكتلة M بعد الصدم في حالة التصادم المرن بافتراض سرعتي M و m متوازيتين بعد الصدم.

2/ أحسب السرعة v' للجملة $(M+m)$ و الانضغاط الأعظمي x_0' للنابض في حالة التصادم اللين.

3/ أحسب العمل المصروف للانضغاط الأعظمي x_0' للنابض في حالة التصادم اللين.



Exercice 6.8

Un corps M de masse m est soumis à un champ de forces à symétrie sphérique, et d'énergie potentielle de la forme : $E_p(M) = Kr^2e^{-r^2/a^2}$, où K et a sont des constantes positives et $r = OM$ la distance entre le corps M et l'origine O d'un repère inertiel.

1/ Représenter graphiquement $E_p(r)$ en fonction de , sachant que la dérivée seconde de l'énergie est positive pour $r = 0$, négative pour $r = a$ et tend vers zéro en valeurs positives quand $r \to \infty$.

تمرين 8.6

يخضع جسم M كتلته m لحقل قوى له تناظر كروي و طاقته الكامنة من الشكل: $E_p(M) = Kr^2e^{-r^2/a^2}$ حيث K و a ثابتان موجبان و $r = OM$ بعد الجسم M عن المبدإ O لمعلم عطالي.

1/ أرسم المنحنى $E_p(r)$ بدلالة ، علما أن المشتقة الثانية للطاقة موجبة عند $r = 0$، سالبة عند $r = a$ و تؤول نحو الصفر بقيم موجبة من أجل $r \to \infty$.

2/ جد عبارة القيمة العظمى للطاقة E_p .

2/Trouver l'expression de la valeur maximale de l'énergie E_p.

3/ Trouver les positions d'équilibre sur l'axe $X'OX$ où X est l'abscisse du corps: $-\infty \prec X \prec +\infty$.

4/ Quelles sont les positions d'équilibre stable ? justifier votre réponse.

5/ Trouver l'expression de la force $\vec{F}(M)$.

3/ جد مواضع التوازن على المحور $X'OX$ حيث X فاصلة الجسم: $-\infty \prec X \prec +\infty$.

4/ ما هي مواضع التوازن المستقر؟ علل إجابتك.

5/ جد عبارة القوة $\vec{F}(M)$.

Exercice 6.9

Une particule de masse m est lâchée en A sans vitesse initiale. (Figure ci-dessous). On cherche à savoir quelle doit être la hauteur H pour que la particule atteigne le point S sommet de la gouttière.

1/ Appliquer le théorème de l'énergie mécanique pour calculer la vitesse v_B au point B.

2/ Exprimer h en fonction de et θ.

3/ Appliquer le théorème de l'énergie mécanique pour calculer la vitesse v_C au point C en fonction de h et v_B.

4/ En appliquant le théorème fondamental de la dynamique, déduire la valeur de la réaction R en fonction de m, r, θ, v_B et g.

5/ Démontrer que la vitesse minimale que doit acquérir la particule au point B pour atteindre le point S est $v_{B,\min} = 2\sqrt{gr}$.

6/ En prenant $v_{B,\min}$ la vitesse au point B, calculer la réaction aux points B et S. Que conclure ? En quel point la réaction s'annule-t-elle ?

7/ Quelle est la vitesse $v_{0,B}$ que doit avoir la particule au point B pour atteindre le point S sans que la réaction ne change de signe ? Quelle est la valeur de H correspondante ?

تمرين 9.6

تترك جسيمة كتلتها m من A بدون سرعة ابتدائية. (الشكل في الأسفل). نبحث لنعرف ما هو الارتفاع H اللازم لكي تبلغ الجسيمة النقطة S قمة المجرى.

1/ طبق نظرية الطاقة الميكانيكية لحساب السرعة v_B في النقطة B.

2/ عبر عن h بدلالة و θ.

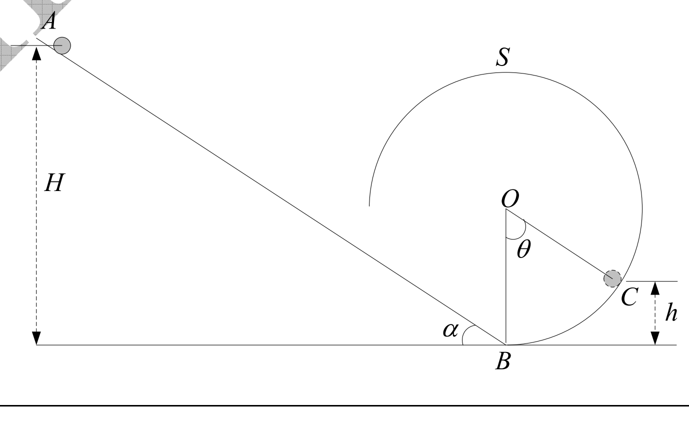
3/ طبق نظرية الطاقة الميكانيكية لحساب السرعة v_C في النقطة C بدلالة h و v_B.

4/ بتطبيق النظرية الأساسية للتحريك، إستنتج قيمة رد الفعل R بدلالة m, r, θ, v_B و g.

5/ برهن أن السرعة الأصغرية التي يجب على الجسيمة اكتسابها في النقطة B لتبلغ النقطة S هي $v_{B,\min} = 2\sqrt{gr}$.

6/ باتخاذ $v_{B,\min}$ السرعة في النقطة B، أحسب رد الفعل في النقطتين B و S. ماذا تستخلص؟ في أي نقطة ينعدم رد الفعل؟

7/ ما هي السرعة $v_{0,B}$ التي يجب أن تتوفر عليها الجسيمة في النقطة B لكي تصل إلى النقطة S دون أن يغير رد الفعل الاتجاه ؟ ما هي قيمة H المناسبة؟



Exercice 6.10

Trois billes de masses m_1, m_2, m_3 reposent dans une gouttière horizontale parfaitement lisse. La bille m_1 est poussée avec une vitesse initiale dans la direction de la bille m_2 qui à son tour, et après le choc avec m_1, roule dans la direction de m_3 et l'heurte. En considérant les premier et deuxième chocs parfaitement élastiques, quelle doit être la vitesse que doit prendre la bille m_2 pour que la vitesse de la bille m_3 soit maximale ?

تمرين 10.6

توضع ثلاث كرات كتلها m_1, m_2, m_3 في مجرى أفقي كامل الملوسة. تدفع الكرة m_1 بسرعة ابتدائية في اتجاه الكرة m_2 و التي بدورها، و بعد الصدم مع m_1، تتدحرج في اتجاه m_3 و تصدمها. باعتبار الصدمتين الأولى و الثانية مطلقتي المرونة، فما هي القيمة التي يجب أن تأخذها الكرة m_2 حتى تكون سرعة الكرة m_3 بعد الصدم أعظمية.

Exercice 6.11

Le corps de la figure ci-dessous a une masse $m = 5kg$. Partant du repos, il glisse sur un plan incliné d'un angle $\alpha = 60°$ par rapport à l'horizontale, jusqu'à ce qu'il atteigne le ressort R de longueur à vide $l_0 = 40cm$, de constante de raideur $k = 5000 N.m^{-1}$, et dont l'autre extrémité C est fixée au bout du plan. On suppose qu'une force de frottement s'oppose au mouvement du corps sur le segment $AB = a$, le coefficient de frottement cinétique étant $\mu = 0,2$, puis elle s'annule sur le reste du trajet $BC = 2a$.

1/ Calculer la force de frottement sur le segment AB.

2/ Calculer la vitesse acquise par le corps au point B, puis la vitesse v avec laquelle le corps heurte le ressort.

3/ De combien le ressort se déforme-t-il ?

4/ De combien le corps remonte-t-il sur le plan incliné lorsqu'il est repoussé par le ressort vers le haut à partir du point où a eu lieu le premier choc, en supposant que la remontée se fait sans frottement ?

On prend $g = 9,8ms^{-2}$.

تمرين 11.6

الجسم المبين على الشكل أسفله كتلة هي $m = 5kg$ و ينطلق من السكون لينزلق على مستوى مائل بزاوية $\alpha = 60°$ بالنسبة للأفق، حتى يبلغ النابض الذي طوله و هو فارغ $l_0 = 40cm$، ثابت مرونته $k = 5000 N.m^{-1}$ وحيث طرفه الآخر مثبت في نهاية المستوى. نفترض قوة احتكاك تعاكس حركة الجسم على القطعة المستقيمة $AB = a$، معامل الاحتكاك الحركي يساوي $\mu = 0,2$، ثم تنعدم على باقي المسلك $BC = 2a$.

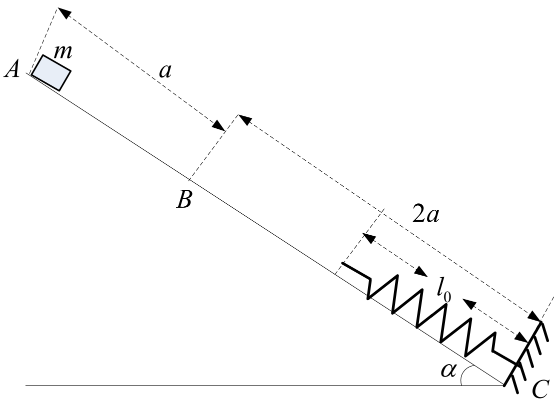
1/ أحسب قوة الاحتكاك على القطعة المستقيمة AB.

2/ أحسب السرعة المكتسبة من طرف الجسم في النقطة B، ثم السرعة v التي يصدم بها الجسم النابض.

3/ ما هو مقدار انضغاط النابض؟

4/ بكم يصعد الجسم على المستوى المائل حينما يدفعه النابض من جديد إلى الأعلى ابتداء من نقطة الاصطدام الأول ، بافتراض أن الصعود يتم بدون احتكاكات؟

نأخذ $g = 9,8ms^{-2}$.



Exercice 6.12

On abandonne sans vitesse initiale à l'instant $t=0$ un point matériel de masse m en un point M_0 de la face convexe d'une sphère de centre O et de rayon R, sur laquelle il est susceptible de glisser sans frottement. (Figure ci-dessous).

1/ En n'appliquant que le théorème de la conservation de l'énergie trouver la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ en fonction de R, g, α et θ.

2/ En appliquant le principe fondamental de la dynamique trouver la réaction du support en fonction de θ, α, m et g.

3/ Pour quel angle θ_0 le point matériel quitte-t-il la sphère ? Discuter le résultat.

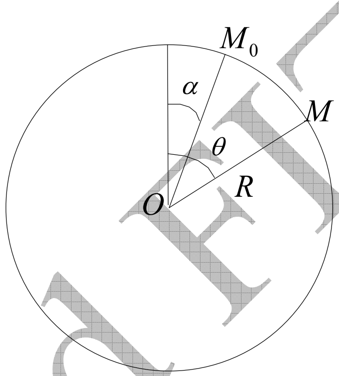
تمرين 12.6

نترك نقطة مادية كتلتها m بدون سرعة ابتدائية في اللحظة $t=0$ من النقطة M_0 لتنزلق بدون احتكاكات على الوجه المحدودب لكرة مركزها O و نصف قطرها R. (الشكل في الأسفل).

1/ بتطبيق نظرية انحفاظ الطاقة فقط أوجد السرعة الزاوية $\dot{\theta}$ بدلالة R, g, α و θ.

2/ بتطبيق المبدإ الأساسي للتحريك أوجد رد فعل الحامل بدلالة θ, α, m و g.

3/ من أجل أي زاوية θ_0 تغادر النقطة المادية الكرة؟ ناقش النتيجة.



Exercice 6.13

Un corps de masse m se déplace sur l'axe $x'Ox$. Son énergie potentielle est donnée par l'expression $E_p = K\dfrac{x}{x^2+a^2}$, où K et a sont des constantes positives.

1/ Représenter l'allure générale de la courbe $E_p = f(x)$.

2/ Trouver les positions d'équilibre en précisant celles qui sont stables et celles qui sont instables.

تمرين 13.6

يتحرك جسم كتلته m على المحور $x'Ox$. طاقته الكامنة معطاة بالعبارة: $E_p = K\dfrac{x}{x^2+a^2}$ ، حيث K و a ثابتان موجبان.

1/ أرسم الشكل العام للمنحنى $E_p = f(x)$.

2/ أوجد مواضع التوازن موضحا المستقرة منها و الغير مستقرة.

Exercice 6.14

Soit un référentiel R de repère $(O,\vec{u}_x,\vec{u}_y,\vec{u}_z)$. Une bille assimilée à un point P, de masse m, est astreinte à se déplacer sans frottements le long d'un demi-cercle de rayon a. (Figure ci-dessous).

Le point P est attaché à un fil élastique dont l'autre extrémité est fixée en $O'(OO'=a)$. Le fil possède une

تمرين 14.6

ليكن مرجع R ذي المعلم $(O,\vec{u}_x,\vec{u}_y,\vec{u}_z)$.

كرية متمثلة في نقطة P ، كتلتها m ، مضطرة للانتقال بدون احتكاك على طول نصف دائرة نصف قطرها a. (الشكل في الأسفل).

النقطة P مربوطة إلى خيط مطاطي حيث يثبت

raideur k et une longueur à vide l_0. Le point P est repéré par l'angle $(Ox,OP)=\theta$.

1. a/ Exprimer le vecteur $\overrightarrow{O'P}$ en fonction de a,θ dans la base polaire $\left(\vec{u}_r=\frac{\overrightarrow{OP}}{a},\vec{u}_\theta\right)$. En déduire l'expression du module $O'P$.

b/ Exprimer la tension $\vec{T}$ du fil en fonction de a,k,l_0 et θ dans cette même base.

2. a/ Déterminer l'expression du vecteur vitesse $\vec{v}$ dans la base polaire.

b/ On note $\vec{F}$ la résultante des forces exercées sur la bille P. Donner l'expression de la puissance $\vec{F}.\vec{v}$ en fonction de a et θ.

(c) En déduire l'énergie potentielle E_p dont dérive la force $\vec{F}$.

3. (a) On suppose vérifiées les relations suivantes entre les paramètres :

$$a=\frac{2mg}{k}\quad,\quad l_0=\sqrt{3}\left(a-\frac{mg}{k}\right)$$

Quelles sont les positions d'équilibre θ_1 et θ_2 pour $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$?

(b) Étudier la stabilité des équilibres obtenus.

الطرف الآخر في O' $(OO'=a)$. للخيط ثابت مرونة k و طول و هو فارغ l_0. تحدد النقطة P بالزاوية $(Ox,OP)=\theta$.

1.أ/ عبر عن الشعاع $\overrightarrow{O'P}$ بدلالة a,θ في القاعدة القطبية $\left(\vec{u}_r=\frac{\overrightarrow{OP}}{a},\vec{u}_\theta\right)$. إستنتج عبارة الشدة $O'P$.

ب/ عبر عن التوتر $\vec{T}$ للخيط بدلالة a,k,l_0 و θ في نفس القاعدة.

2.أ/ حدد عبارة شعاع السرعة $\vec{v}$ في القاعدة القطبية.

ب/ نرمز بـــ $\vec{F}$ لمحصلة القوى المطبقة على الكرية P. إعط عبارة الاستطاعة $\vec{F}.\vec{v}$ بدلالة a و θ.

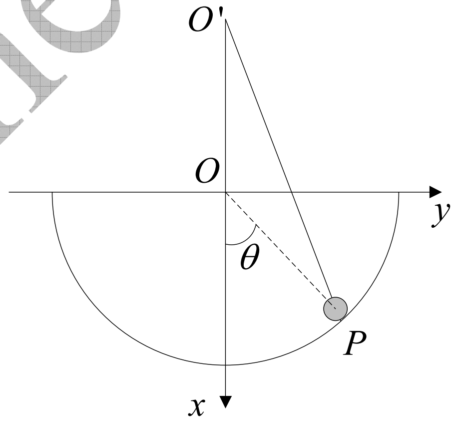
ج/ إستنتج الطاقة الكامنة E_p التي تشتق منها $\vec{F}$.

3.أ/ نفترض العلاقات التالية بين الثوابت محققة:

$$a=\frac{2mg}{k}\quad,\quad l_0=\sqrt{3}\left(a-\frac{mg}{k}\right)$$

ما هما موضعي التوازن θ_1 و θ_2 من أجل $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$؟

ب/ أدرس استقرار التوازنين المحصل عليهما.



Exercice 6.15

Deux pendules simples de même longueur l, sont suspendus au même point O. Les billes B_1 et B_2 qui les constituent possèdent les masses m_1 et m_2, et seront supposées ponctuelles. Au départ, B_1 et B_2 sont en équilibre. On écarte B_1 d'un angle α_0 , puis on l'abandonne sans vitesse initiale.

1/ Déterminer les vitesses v_1 et v_2 de B_1 et B_2 après le choc, en fonction de α, l, g et du rapport des masses $x = m_1/m_2$; ainsi que les angles d'écart maximum α_1 et α_2 de B_1 et B_2 après le choc, en fonction de α et x dans les deux cas :

a/ en supposant la collision parfaitement élastique (que se passe-t-il pour $x \succ 1$; $x = 1$; $x \prec 1$?) ;

b/ si on enduit B_1 et B_2 de glu, de manière à rester collées après la collision (choc mou).

2/ Application numérique : $\alpha_0 = 60°$.

a/ On se place dans le cas1/a/ :

pour quelle valeur de x les pendules remontent-ils en sens contraires, du même angle que l'on déterminera ?

b/ Pour $x = 2$, déterminer les angles d'écart dans les cas $1/a/$ et $1/b/$.

تمرين 15.6

يعلق في نفس النقطة O نواسان بسيطان لهما نفس الطول l. الكريتان B_1 و B_2 اللتان تشكلهما لهما كتلتين m_1 و m_2 ، و نفترضهما نقطيتين. في البداية m_1 و m_2 في توازن. نزيح B_1 بزاوية α_0 ، ثم نتركها بدون سرعة ابتدائية.

1/ حدد السرعتين v_1 و v_2 لـــ m_1 و m_2 بعد الصدم، بدلالة g,l,α و نسبة الكتلتين $x = m_1/m_2$ ؛ و كذا زاويتي الانحراف الأعظمي α_1 و α_2 لـــ m_1 و m_2 بعد الصدم، بدلالة α و x في الحالتين:

ا/ بافتراض الاصطدام كامل المرونة، (ما الذي يحدث من أجل $x \succ 1$ ؛ $x = 1$ ؛ $x \prec 1$ ؟)؛

ب/ لو طلينا m_1 و m_2 بغراء بحيث تبقيان ملتصقتين بعد الصدم (الصدم اللين).

2/ تطبيق عددي: $\alpha_0 = 60°$.

ا/ نتخذ الحالة1/ا/:

من أجل أي قيمة لـــx يصعد النواسان في اتجاهين متعاكسين، بنفس الزاوية الواجب تعيينها؟

ب/ من أجل $x = 2$ ، حدد زاويتي الانحراف في الحالتين1/ا/ و 1/ب/.

Corrigés des exercices 2.1 à 2.7: حلول التمارين من 1.2 إلى 7.2

Exercice2.1:

a/ $\boxed{\left|\vec{V_1}\right| = 6,40}$, $\boxed{\left|\vec{V_2}\right| = 5,38}$, $\boxed{\left|\vec{V_3}\right| = 5,91}$

b/ $\boxed{\vec{A} = 10\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}}$, $\boxed{\vec{B} = 9\vec{i} - 15\vec{j} + 15\vec{k}}$

c/ $\boxed{\vec{C} = 8\vec{i} - 5\vec{j} + 7\vec{k}}$ $\dfrac{\vec{C}}{C} = \vec{u}_c \Rightarrow \boxed{\vec{u}_c = \dfrac{8}{\sqrt{138}}\vec{i} - \dfrac{5}{\sqrt{138}}\vec{j} + \dfrac{7}{\sqrt{138}}\vec{k}}$

d/ $\boxed{\vec{V}_1 . \vec{V}_3 = 31}$

$cos\alpha \approx 0,82 \Rightarrow \boxed{\alpha \approx 35,1°}$

e/ $\boxed{\vec{V_2} \wedge \vec{V}_3 = 5\vec{i} - 26\vec{j} - 17\vec{k}}$

Exercice2.2:

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}$$

$$S = \left[\left(A_x + B_x\right)^2 + \left(A_y + B_y\right)^2 + \left(A_z + B_z\right)^2 \right]^{1/2}$$

$$D = \left[\left(A_x - B_x\right)^2 + \left(A_y - B_y\right)^2 + \left(A_z - B_z\right)^2 \right]^{1/2}$$

Exercice2.3:

$$\vec{V} = 6\vec{i} + 6\vec{j} + \vec{k} \Rightarrow \boxed{V = 8,54}$$

$$cos\alpha = 0,70 \Rightarrow \boxed{\alpha = 45,6°}$$

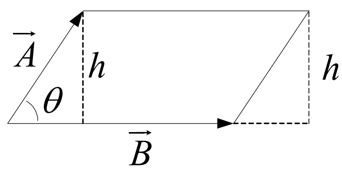
$$cos\beta = 0,70 \Rightarrow \boxed{\beta = 45,6°}$$

$$cos\theta \approx 0,12 \Rightarrow \boxed{\theta = 83,1°}$$

Exercice2.4:

a/ surface du parallélogramme : $S = h.\left|\vec{B}\right|$

$$S = \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\sin\theta$$



On en déduit que: $S = \left|\vec{A} \wedge \vec{B}\right| = \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\sin\theta$

Rappelons-nous que la surface d'un triangle de côtés $\left|\vec{A}\right|$ et $\left|\vec{B}\right|$ est égale à :

$$S_0 = \frac{1}{2}\left|\vec{A} \wedge \vec{B}\right| = \frac{1}{2}\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\sin\theta$$

b/ soient les deux vecteurs:

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{A} = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}$$

$$\left|\vec{A}+\vec{B}\right| = \left[\left(A_x + B_x\right)^2 + \left(A_y + B_y\right)^2 + \left(A_z + B_z\right)^2\right]^{1/2}$$

$$\left|\vec{A}-\vec{B}\right| = \left[\left(A_x - B_x\right)^2 + \left(A_y - B_y\right)^2 + \left(A_z - B_z\right)^2\right]^{1/2}$$

En égalisant les deux dernières expressions, et en développant nous arrivons au résultat : $A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z = 0$, qui n'est autre que le produit scalaire $\left(\vec{A}.\vec{B}\right) = 0 \Leftrightarrow \vec{A} \perp \vec{B}$.

Exercice2.5:

En calculant le produit vectoriel de ces deux vecteurs nous trouvons que le résultat est zéro:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & -\vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2xy + z^3 & x^2 + 2y & 2xz^2 - 2 \end{vmatrix} = \vec{0}$$

Exercice2.6:

Pour que les deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ soient parallèles il faut que la relation $\vec{B} = \lambda.\vec{A}$ soit vérifiée, avec λ constante.

Partant de cela on peut écrire:

$$\frac{\vec{B}}{\lambda} = \vec{A} \Rightarrow \frac{\vec{B}}{\lambda} = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{\lambda} \\ \dfrac{-3}{\lambda} \\ \dfrac{4}{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

On en déduit la valeur de λ et par la suite les valeurs de α et β:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{2}{\lambda} = 1 \Rightarrow \boxed{\lambda = 2} \\ \dfrac{-3}{\lambda} = \alpha \Rightarrow \boxed{\alpha = -1,5} \\ \dfrac{4}{\lambda} = \beta \Rightarrow \boxed{\beta = 2} \end{array}\right| \Rightarrow \vec{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1,5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

On s'assure des deux résultats en calculant $\vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{0}$

Les vecteurs unitaires correspondant à chacun des deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont :

$$\frac{\vec{A}}{A}=\vec{u}_A \Rightarrow \boxed{\vec{u}_A=\frac{1}{\sqrt{7,25}}\vec{i}-\frac{1,5}{\sqrt{7,25}}\vec{j}+\frac{2}{\sqrt{7,25}}\vec{k}}$$

$$\frac{\vec{B}}{B}=\vec{u}_B \Rightarrow \boxed{\vec{u}_B=\frac{2}{\sqrt{29}}\vec{i}-\frac{3}{\sqrt{29}}\vec{j}+\frac{4}{\sqrt{29}}\vec{k}}$$

Exercice2.7:

Des données nous pouvons en déduire que l'angle entre les deux vecteurs est :

$$180-(25+50)=105°$$

Appliquons la formule **2.9** pour trouver les deux composantes :

$$\frac{V}{\sin 105°}=\frac{V_x}{\sin 50}=\frac{V_y}{\sin 25}$$

$$\boxed{V_x=\frac{\sin 50}{\sin 105°}V} \Rightarrow \boxed{V_x=23,8}$$

$$\boxed{V_y=\frac{\sin 25}{\sin 105°}V} \Rightarrow \boxed{V_y=13,1}$$

EXERCICES

تـمـاريـن

Remarque:pour tous les exercices de cette série, les modules des vecteurs sont exprimés par la même unité.

تنبيه: في كل تمارين هذه السلسلة نعتبر أن طويلات الأشعة معبّر عنها بنفس الوحدة.

Exercice 2.1

On considère, dans un repère orthonormé OXYZ, les trois vecteurs :

$\vec{V_1} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{V_2} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$ et $\vec{V_3} = 5\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$.

a/ calculer les modules de $\vec{V}_1$، $\vec{V}_2$ et $\vec{V}_3$,

b/ calculer les composantes ainsi que les modules des vecteurs : $\vec{A} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3$ et $\vec{B} = 2\vec{V}_1 - \vec{V}_2 + \vec{V}_3$,

c/ déterminer le vecteur unitaire porté par $\vec{C} = \vec{V}_1 + \vec{V}_3$,

d/ calculer le produit scalaire $\vec{V}_1.\vec{V}_3$ et en déduire l'angle formé par les deux vecteurs.

e/ calculer le produit vectoriel $\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3$.

تمرين 1.2

في معلم متجانس و متعامد $OXYZ$، نعتبر الأشعة الثلاثة التالية:

$\vec{V_1} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 4\vec{k}$ ؛ $\vec{V_2} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$ ؛ $\vec{V_3} = 5\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$.

ا/ أحسب طويلة كل من $\vec{V}_1$ ، $\vec{V}_2$ و $\vec{V}_3$.

ب/ أحسب مركبات و طويلات الأشعة $\vec{A} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3$ و $\vec{B} = 2\vec{V}_1 - \vec{V}_2 + \vec{V}_3$

ج/ عين شعاع الواحدة المحمول على $\vec{C} = \vec{V}_1 + \vec{V}_3$

د/ أحسب الجداء السلمي $\vec{V}_1.\vec{V}_3$ ثم إستنتج الزاوية المحصورة بينهما.

هـ/ أحسب الجداء الشعاعي $\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3$

Exercice 2.2

Montrer que les grandeurs de la somme et de la différence de deux vecteurs $\vec{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$ et $\vec{B} = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}$ exprimées en coordonnées rectangulaires sont respectivement :

$$S = \left[\left(A_x + B_x\right)^2 + \left(A_y + B_y\right)^2 + \left(A_z + B_z\right)^2 \right]^{1/2}$$

$$D = \left[\left(A_x - B_x\right)^2 + \left(A_y - B_y\right)^2 + \left(A_z - B_z\right)^2 \right]^{1/2}$$

التمرين 2.2

تحقق من إن مقدراي المجموع والفرق لشعاعين $\vec{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$ و $\vec{B} = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}$ المعبر عنهما بالإحداثيات المستطيلة على التوالي هما:

$$S = \left[\left(A_x + B_x\right)^2 + \left(A_y + B_y\right)^2 + \left(A_z + B_z\right)^2 \right]^{1/2}$$

$$D = \left[\left(A_x - B_x\right)^2 + \left(A_y - B_y\right)^2 + \left(A_z - B_z\right)^2 \right]^{1/2}$$

Exercice 2.3

Trouver la sommes des trois vecteurs : $\vec{V_1} = 5\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$ ؛ $\vec{V_2} = -3\vec{i} + \vec{j} - 7\vec{k}$ ؛ $\vec{V_3} = 4\vec{i} + 7\vec{j} + 6\vec{k}$.

Calculer le module de la résultante ainsi que les angles qu'elle forme avec OY, OX et OZ .

التمرين 3.2

أوجد محصلة مجموع الأشعة التالية :

$\vec{V_1} = 5\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$ ؛ $\vec{V_2} = -3\vec{i} + \vec{j} - 7\vec{k}$ ؛ $\vec{V_3} = 4\vec{i} + 7\vec{j} + 6\vec{k}$.

أحسب طويلة المحصلة و الزوايا التي تصنعها مع كل من OY, OX و OZ.

Exercice 2.4	التمرين 4.2
a/ Montrer que la surface d'un parallélogramme est $\left\lvert \vec{A} \wedge \vec{B} \right\rvert$ tels que $\lvert \vec{A} \rvert$ et $\lvert \vec{B} \rvert$ sont les côtés du parallélogramme formé par les deux vecteurs. b/ Prouver que les vecteur $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont perpendiculaires si $\left\lvert \vec{A} + \vec{B} \right\rvert = \left\lvert \vec{A} - \vec{B} \right\rvert$	ا/ برهن أن مساحة متوازي الأضلاع هي $\left\lvert \vec{A} \wedge \vec{B} \right\rvert$ حيث $\lvert \vec{A} \rvert$ و $\lvert \vec{B} \rvert$ ضلعي متوازي الأضلاع المشكل من الشعاعين. ب/ برهن أن الشعاع $\vec{A}$ يكون عموديا على الشعاع $\vec{B}$ إذا تحققت العلاقة $\left\lvert \vec{A} + \vec{B} \right\rvert = \left\lvert \vec{A} - \vec{B} \right\rvert$

Exercice 2.5	التمرين 5.2
Soit le vecteur : $\vec{V} = \left(2xy + z^3\right)\vec{i} + \left(x^2 + 2y\right)\vec{j} + \left(3xz^2 - 2\right)\vec{k}$ Montrer que $\overrightarrow{grad} \wedge \vec{V} = \vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \vec{0}$	إذا كان الشعاع: $\vec{V} = \left(2xy + z^3\right)\vec{i} + \left(x^2 + 2y\right)\vec{j} + \left(3xz^2 - 2\right)\vec{k}$ برهن أن $\overrightarrow{grad} \wedge \vec{V} = \vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \vec{0}$

Exercice 2.6	التمرين 6.2
Soient les deux vecteurs $\vec{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, $\vec{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ Trouver α, β pour que $\vec{B}$ soit parallèle à $\vec{A}$, puis déterminer le vecteur unitaire pour chacun des deux vecteurs.	ليكن الشعاعان $\vec{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$; $\vec{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ عين β, α بحيث يوازي الشعاع $\vec{B}$ الشعاع $\vec{A}$، ثم عين شعاعي الواحدة الموافقة لكل منهما.

Exercice 2.7	التمرين 7.2
La résultante de deux vecteurs a 30 unités de long et forme avec eux des angles de 25° et 50°. Trouver la grandeur des deux vecteurs.	محصلة شعاعين طولها 30 وحدة وتصنع معهما زاويتين 25° و 50°. أوجد طويلة الشعاعين.